Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 17:00-22:00, torsdag 18/12 2014
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E:18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.

En ammoniakmolekyl (NH_3) kan beskrivas med positionstillstånden $|1\rangle$ och $|2\rangle$ där $|1\rangle$ har kväveatomen ovanför det plan som definieras av väteatomerna och $|2\rangle$ har kväveatomen nedanför detta.

Vid tiden $t = 0$ befinner sig molekylen i tillståndet $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$

a) Uttryck vågfunktionen $|\Psi\rangle$ i energitillstånden $|\mathrm{I}\rangle$ och $|\mathrm{II}\rangle$ vid tiden $t = 0$. (2p)

b) Beräkna sannolikheten att hitta energin $E_0 - A$ vid tiden $t = 0$. (1p)

c) Kommer sannolikheten att hitta molekylen i tillståndet $|1\rangle$ vara tidsberoende eller oberoende av tiden? Motivera ditt svar! (1p)

d) Kommer sannolikheten att hitta molekylen i tillståndet $|II\rangle$ vara tidsberoende eller oberoende av tiden? Motivera ditt svar! (1p)

2.

En ström av partiklar med spinn S=1 får passera genom en Stern-Gerlach apparat varefter de befinner sig i tillståndet $|\chi\rangle = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+S\rangle - \frac{1}{2}|0S\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-S\rangle\right)$. $|+S\rangle, |0S\rangle, |-S\rangle$ representerar bastillstånd med avseende på spinnrörelsemängdsmomentets projektion.

a) Hur stor andel av partiklarna passerar genom apparaten $\begin{Bmatrix} + & | \\ 0 & | \\ - & \end{Bmatrix}$ där + och 0 kanalerna är blockerade? $|+S\rangle, |0S\rangle, |-S\rangle$ är bastillstånd med avseende på denna apparat. (3p)

b) Hur stor andel av partiklarna i tillståndet $|\chi\rangle$ passerar genom en apparat som bara släpper igenom partiklar i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|+S\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|0S\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|-S\rangle$ (2p)

c) Betrakta ett stort antal partiklar i tillståndet $|\phi\rangle$ enligt ovan.
Vad är det totala spinnrörelsemängdsmomentet hos de enskilda partiklarna?
Vilka är de möjliga projektionerna?
Vad är medelvärdet av projektionerna över alla partiklarna? (3p)

3.

En proton befinner sig i en oändlig (en-dimensionell) potentialgrop med bredden 0.5 nm. Protonen befinner sig i tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle + \sqrt{3}|3\rangle\right)$ där symbolen $|n\rangle$ representerar ett bastillstånd som motsvarar energinivån n.

a) Skriv tillståndet som funktion av position (x) och tid (t). (1p)
b) Rita upp sannolikhetstätheten vid tiden t=0. (2p)

c) Befinner sig protonen i ett stationärt tillstånd? Motivera. (1p)

d) Antag ett stort antal likadant preparerade system med protoner i tillståndet $|\Phi\rangle$. Vad blir medelvärdet av energimätningar på dessa? (2p)

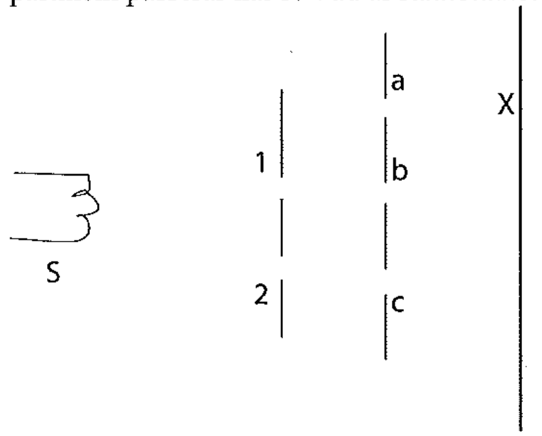
e) Beräkna de möjliga rörelsemängderna protonen kan ha baserat på de möjliga energiresultaten och uppskatta obestämdheten i vart och ett av dessa via Heisenbergs obestämdhetsrelation. (3p)

4.

Källan S i figuren skickar elektroner mot en första vägg med hålen 1 och 2. Denna följs av en andra vägg med tre hål (a, b, c). Partiklar som tar sig igenom något av de tre sista hålen detekteras av en detektor som registrerar antalet partiklar som når läget X.

a) Skriv ner *amplituden* för att en elektron ska nå detektorn vid X om alla vägar är möjliga och lika sannolika. Använd Diracnotation, dvs t ex $\langle 1|S\rangle$ för amplituden att en elektron från S ska passera hål 1. (2p)

b) Hålen 1 och a stängs nu och en detektor placeras ut som med 100% säkerhet detekterar om partikeln passerar hål b. Vad är *sannolikheten* att elektroner når detektorn vid X? (2p)



5.

a) Förklara kvalitativt begreppet *tunnling* och beskriv en fysikalisk process där tunnling uppstår. (2p)
b) Förklara kvalitativt begreppet *snärjning* och ge ett exempel på ett snärjt tillstånd. (2p)
c) Betrakta ett dubbelspaltexperiment med en stråle av fermioner. Skulle diffraktionsmönstret ändras om experimentet istället gjordes med en stråle av bosoner? Vi antar att den enda egenskapen som skiljer är spinnet. (1p)

6.

En apparat A beskrivs av amplituderna :
$\langle +|A|+\rangle = \frac{1}{4}, \langle +|A|0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \langle +|A|-\rangle = \frac{1}{4}, \langle 0|A|0\rangle = \frac{1}{2}, \langle 0|A|-\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \langle -|A|-\rangle = \frac{1}{4}.$

a) Vad är sannolikheten att efter apparaten mäta partiklar i $-$ tillståndet om man skickar in partiklar i $+$ tillståndet? (2p)
b) Vad är sannolikheten att efter apparaten mäta partiklar i $-$ tillståndet om man skickar in partiklar i tillståndet $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + |0\rangle + |-\rangle)$. (2p)
c) Låt B vara en annan apparat. Vad innebär uttrycken $AB|\Psi\rangle$ respektive $BA|\Psi\rangle$? När gäller inte att $AB|\Psi\rangle = BA|\Psi\rangle$? (1p)

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$$
$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Kvantformalism

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$
$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i$$
$$\sum_i |C_i|^2 = 1$$
$$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$$
$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \text{ (eller } |)$$
$$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+\rangle_x + |-\rangle_x\,\right)$$
$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,-|+\rangle_x + |-\rangle_x\,\right)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$
$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$
$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|1\rangle - |2\rangle\,\right) \qquad \text{energi } E_0 + A$$
$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|1\rangle + |2\rangle\,\right) \qquad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,, \quad e = 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

Lösningsförslag

1. Vi har att $|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$ med energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ med energi $E_0 - A$

Lös ut $|1\rangle$ och $|2\rangle$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|1\rangle = |I\rangle + |II\rangle \Rightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|2\rangle = |II\rangle - |I\rangle \Rightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|II\rangle - |I\rangle)$$

a) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|I\rangle + |II\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}(|II\rangle - |I\rangle) =$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{6}}\right)|I\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{6}}\right)|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2})|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2})|II\rangle$$

b) $P(E_0 - A) = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2})\right|^2 = \frac{1}{6}(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) Tillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$ är energitillstånd med tidsberoende fas $e^{i(E_0 \pm A)t/\hbar}$ så om vi vid tiden $t=0$ har tillståndet $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)$ har vi vid en senare tid $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_I(x)e^{-i(E_0+A)t/\hbar} + \Phi_{II}(x)e^{-i(E_0-A)t/\hbar}\right) =$

$$= \frac{e^{-i(E_0+A)t/\hbar}}{\sqrt{2}}\left(\Phi_I(x) + \Phi_{II}(x)e^{-2iAt/\hbar}\right)$$

Vid tidpunkter t då $\frac{2At}{\hbar} = (2n+1)\pi$ blir fasen $= -1$ och tillståndet $|1\rangle$ har blivit $|2\rangle$, dvs sannolikheten att hitta molekylen i tillståndet $|1\rangle$ är tidsberoende.

d) Nej, sannolikheten att hitta $|II\rangle$ är $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$ oberoende av tiden.

2. Tillståndet $|x\rangle$ är inte normerat. Vi normerar genom

$$1 = \langle x|x\rangle = A^2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} =$$

$$= A^2\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{5}{4}A^2 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

a) Andelen i tillståndet $|-S\rangle$ är $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$

b) Tillståndet $|\phi\rangle$ är normerat ty $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$

Amplituden $\langle\phi|x\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot i\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right\} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Andelen (sannolikheten) $= \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right|^2 = \frac{2}{15}$

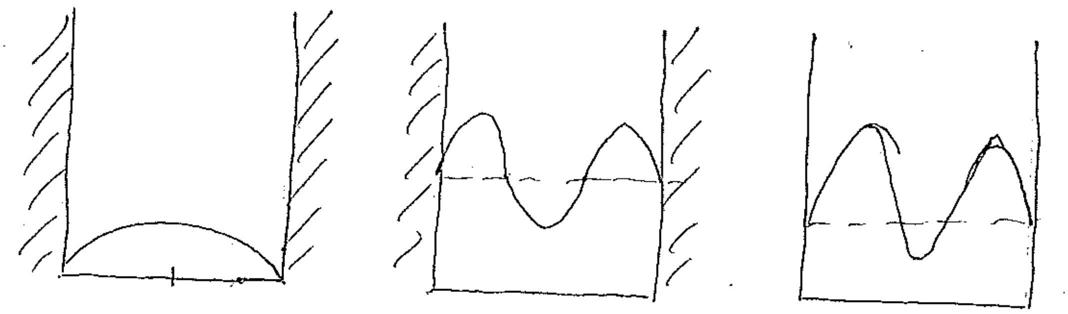
c) Totala spinnet är 1 ($S = 1$ i uppgiften)
De möjliga projektionerna är $+\hbar, 0, -\hbar$
Medelvärdet är $\langle S_z\rangle = P(+\hbar)\cdot\hbar + P(0)\cdot 0 + P(-\hbar)\cdot(-\hbar) =$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{2}\hbar\right\} = 0$$

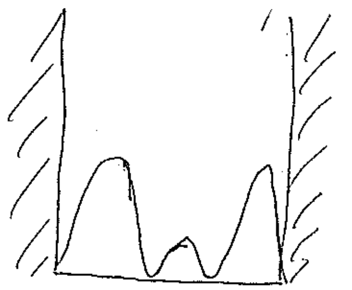
3 a) $\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\sin\frac{\pi x}{L}\cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{3}\sin\frac{3\pi x}{L}\, e^{-iE_3 t/\hbar}\right)$

där $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ och $E_3 = 9\cdot E_1$

b)



$|1\rangle$ $\quad |3\rangle \quad |1\rangle + \sqrt{3}\,|3\rangle$



$P\left(\frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{3}\,|3\rangle)\right)$

c) Sannolikhetstätheten blir tidsberoende pga fasfaktorer. Tillståndet är ej stationärt.

d) Medelvärdet på energin blir $\langle E\rangle = \frac{1}{4}E_1 + \frac{3}{4}E_3 =$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot 9\right) = \frac{28}{4}\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \approx$$

$$\approx 7\cdot\frac{(3{,}14)^2(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{2\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\cdot(0{,}5\cdot10^{-9})^2} = \frac{7\cdot(3{,}14)^2\cdot(1{,}05)^2\cdot10^{-68}}{2\cdot1{,}67\cdot0{,}25\cdot10^{-45}} =$$

$$= 91\cdot10^{-23} = 9{,}1\cdot10^{-22}\ \text{J}$$

e) $p = \hbar k$, $k_1 = \frac{\pi}{L}$, $k_3 = \frac{3\pi}{L}$ från $E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \equiv \frac{p^2}{2m}$

$P_1 = 1{,}05\cdot10^{-34}\cdot\frac{\pi}{0{,}5\cdot10^{-9}} = 6{,}60\cdot10^{-25}$ kg·m/s

$P_3 = 1{,}05\cdot10^{-34}\cdot\frac{3\pi}{0{,}5\cdot10^{-9}} = 1{,}98\cdot10^{-24}$ kgm/s

$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx \frac{\hbar}{0{,}5\cdot10^{-9}} \approx$

$\approx 2\cdot10^{-25}$ kgm/s

4 a) Summera alla amplituder

$\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|c\rangle\langle c|1\rangle\langle 1|s\rangle +$
$+ \langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|s\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|s\rangle + \langle x|c\rangle\langle c|2\rangle\langle 2|s\rangle$.

b) Summera sannolikheterna (vägen känd)

$$|\langle x|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2 + |\langle x|c\rangle\langle c|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2$$

5 a) Tunnling innebär att en partikel kan "passera" en barriär trots att den inte har energi högre än barriären. Ett exempel är alfasönderfall

b) Två partiklar i ett bestämt tillstånd där mätning på den ena partikeln bestämmer resultatet av efterföljande mätning på den andra. T.ex, sönderfallet $\pi^0 \to e^- + e^+$. Dock kan man inte bestämma utfallet av den första mätningen så ingen information överförs genom mätningen.

c) Nej. Diffraktionsmönstret beror ej av spinnet.

6. a) $\langle -|A|+\rangle = \langle +|A|-\rangle^* = \frac{1}{4} \to P_{-\leftarrow +} = \frac{1}{16}$

b) Med $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + |0\rangle + |-\rangle)$ Koll: $\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$

$$|\langle -|A|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{3}|\langle -|A|+\rangle + \langle -|A|0\rangle + \langle -|A|-\rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right|^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \approx 0,24$$

c) $AB|\psi\rangle$: B mäts först följt av A, $BA|\psi\rangle$ tvärtom
Om mätning av den ena stör den andra, gäller ej $AB = BA$