Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 17:00-22:00, torsdag 19/12 2013
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E:18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.

Besvara följande frågor kortfattat (högst ett par meningar):

a) Beskriv Heisenberg's obestämdhetsrelation mellan läge och rörelsemängd för en partikel längs x-axeln. (1p)

b) Ge exempel på partiklar som är bosoner respektive fermioner. (1p)

c) Skriv upp det kvantmekaniska uttrycket för kinetisk energi. (1p)

d) Låt $|i\rangle$ vara bastillstånd. Förenkla uttrycket $\sum_i \langle\chi|i\rangle\langle i|\phi\rangle$ där summan löper över alla bastillstånd $|i\rangle$. (1p)

2.

En ström av partiklar med spinn S=1 går in i en sekvens av tre Stern-Gerlach apparater. Den mittersta apparaten (T) är roterad i förhållande till de andra två (S). Rita respektive apparat enligt Feynmans notation och ange amplituden ut från den sista om:

a) Den första (S) blockerar $|+S\rangle$ och $|0S\rangle$, den sista (S) blockerar $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$ medan den mellersta (T) blockerar $|0T\rangle$. (2p)

b) Den första (S) blockerar $|+S\rangle$ och $|0S\rangle$, den sista (S) blockerar $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$ medan den mellersta (T) släpper igenom $|+T\rangle$, $|0T\rangle$ och $|-T\rangle$. (Skriv upp alla amplituder och motivera slutresultatet!). (2p)

3.

En partikel befinner sig i en oändlig (en-dimensionell) potentialgrop med bredden L. Energitillstånden $|n\rangle$ kan inom intervallet $0 \leq x \leq L$ i lägesrepresentationen skrivas som

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} = \sqrt{\frac{2}{L}}sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-iE_nt/\hbar}$$

Partikeln befinner sig i tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$.

a) Rita vågfunktionen för tillstånden $|1\rangle, |2\rangle$ och $|\Phi\rangle$ vid tiden t=0. (2p)

c) Vid tiden t=0 är sannolikheten att hitta partikeln i högra halvan av lådan maximal. Beräkna denna sannolikhet. (2p)

d) Sannolikhetstätheten $P(x,t) = |\langle x|\Phi\rangle|^2$ är tidsberoende. Skriv upp uttrycket för denna och ange vid vilka tider sannoliheten att hitta partikeln i den vänstra halvan är maximal. (2p)

b) En mätning av partikelns energi vid tiden $t = t_0$ gav resultatet E_2. Rita vågfunktionen som beskriver partikeln för tider $t > t_0$. Motivera! (1p)

4.

Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Rätt svar ger +1p, fel svar ger -1p, och inget svar ger 0p. Uppgiften kan ge mellan 0 och 6p (dvs den ger inte minuspoäng).

a) En proton och en elektron med samma rörelsemängd har samma våglängd.

b) En proton och en elektron som rör sig med samma hastighet har samma våglängd.

c) En proton instängd i en låda med sidan L befinner sig i den 40:e energinivån. Där har den högre energi än en elektron i grundtillståndet i en likadan låda.

d) En stråle av bosoner delar upp sig i ett jämnt antal strålar om den leds genom en Stern-Gerlach apparat.

e) I ett stationärt tillstånd har sannolikhetsamplituden inget tidsberoende.

f) Ett stationärt tillstånd har en bestämd energi.

5.
Två partiklar a och b sprids till tillstånden 1 och 2 så att en partikel hamnar i vardera tillståndet. (De båda partiklarna antas ha samma spinn och detta ändras ej under processen). Ge ett uttryck för *sannolikheten* för denna process (uttryckt i enpartikel amplituderna $\langle 1|a\rangle$, $\langle 2|a\rangle, \langle 1|b\rangle$ och $\langle 2|b\rangle$) om

a) partiklarna är olika (1p)
b) partiklarna är identiska bosoner (1p)
c) partiklarna är identiska fermioner (1p)
d) Vad blir sannolikheterna i a), b) och c) om 1 och 2 är samma tillstånd? (2p)
e) Antag nu istället att partiklarna är spinn-opolariserade elektroner (dvs vi har samma sannolikhet att hitta de två olika projektionerna $+1/2\hbar$ och $-1/2\hbar$ vid mätning) och att 1 och 2 är olika tillstånd. Vad blir nu sannolikheten? (Ledning: inför en extra beteckning för spinnet, t. ex. $|+a\rangle, |-a\rangle, |+b\rangle, |-b\rangle$). (2p)

6.
Antag att vi har ett stort antal partiklar med spinn $s = 3/2$ vilket ger fyra bastillstånd (spinnprojektioner)$|+3/2\rangle, |+1/2\rangle, |-1/2\rangle, |-3/2\rangle$ svarande mot mätvärdena $\frac{3}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$ och $-\frac{3}{2}\hbar$. Partiklarna är alla preparerade i samma tillstånd som ges av

$$|\Psi\rangle = \frac{i}{2}|+3/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-3/2\rangle$$

a) Beräkna $\langle\Psi|\Psi\rangle$. (1p)
b) Beräkna medelvärdet av spinnets projektion för partiklarna. (1p)
b) Hur stor andel av partiklarna passerar igenom en Stern-Gerlach apparat som bara släpper igenom tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+3/2\rangle - \frac{1}{2}|-1/2\rangle$ (2p)

7.
Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet $|2\rangle$ vid tiden $t = 0$ (se formelsamling). Vid tiden t mäter man molekylens energi. Vad är sannolikheten att man då finner den lägsta energin? ($|2\rangle$ är ett av tillstånden där kvävemolekylen har en fix position relativt väteatomerna). (4p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Kvantformalism

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i$

$\sum_i |C_i|^2 = 1$

$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$

$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ (eller |)

$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$

Spinn 1/2

$|+\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\,|+\rangle_x + |-\rangle_x\,)$

$|-\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\,-|+\rangle_x + |-\rangle_x\,)$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$|I\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\,|1\rangle - |2\rangle\,)$ energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\,|1\rangle + |2\rangle\,)$ energi $E_0 - A$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } \ 0 \le x \le L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\ , \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$m_{\mathrm{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

$$m_{\mathrm{proton}} = m_{\mathrm{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$

Lösningsförslag.

1. a) Obestämdhetsrelationen $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ ger att läge och rörelsemängd (samma komponent) inte samtidigt kan mätas med godtycklig noggrannhet. Ett välbestämt läge ger stor spridning i rörelsemängd och vice versa. En planvåg $e^{i(kx-\omega t)}$ har en exakt bestämd rörelsemängd $\hbar k$ men sannolikheten att hitta partikeln i ett intervall $(x, x+dx)$ är oberoende av x.

b) Bosoner har heltaligt spinn, t ex foton, π-meson, K-meson, ^4He, Higgs boson

Fermioner har halvtaligt spinn, t ex elektron, proton, neutron, neutrino, myon, ^3He

c) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ (1-dimension), $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ (3-D)

d) $\sum_i |i\rangle\langle i|$ fungerar som enhetsoperator, så

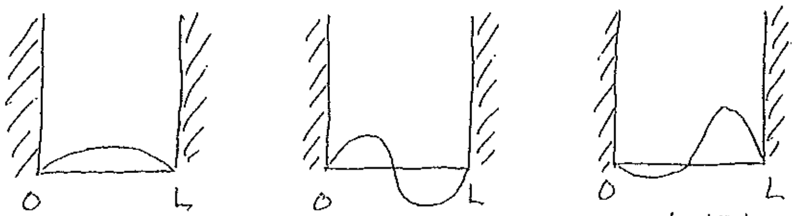
$$\sum_i \langle x|i\rangle\langle i|\phi\rangle = \langle x|\left\{\sum_i |i\rangle\langle i|\right\}|\phi\rangle = \langle x|\phi\rangle$$

2. a) $\underset{S}{\begin{Bmatrix} +| \\ 0| \\ - \end{Bmatrix}} \underset{T}{\begin{Bmatrix} + \\ 0| \\ - \end{Bmatrix}} \underset{S}{\begin{Bmatrix} +| \\ 0 \\ -| \end{Bmatrix}}$ $\langle 0S|-T\rangle\langle -T|-S\rangle + \langle 0S|+T\rangle\langle +T|-S\rangle$

b) $\underset{S}{\begin{Bmatrix} +| \\ 0| \\ - \end{Bmatrix}} \underset{T}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \underset{S}{\begin{Bmatrix} +| \\ 0 \\ -| \end{Bmatrix}}$

$$\langle 0S|-T\rangle\langle -T|-S\rangle + \langle 0S|0T\rangle\langle 0T|-S\rangle + \langle 0S|+T\rangle\langle +T|-S\rangle = \langle 0S|-S\rangle = 0$$

3. a)



$\langle x|1\rangle$ $\langle x|2\rangle$ $\langle x|\Phi\rangle$

b) $t=0 \Rightarrow \langle x|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L} - \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}\right\} = \frac{1}{\sqrt{L}}\left\{\sin\frac{\pi x}{L} - \sin\frac{2\pi x}{L}\right\}$

$$P\left(\frac{L}{2}\leq x\leq L\right) = \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\left(\sin^2\frac{\pi x}{L} - 2\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x/L)}{2} - \left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi x/L)}{2}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \underbrace{\frac{L}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{\Rightarrow 0} - \frac{L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{L}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \underbrace{\frac{L}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}_{\Rightarrow 0}\right]_{L/2}^{L} =$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} + \frac{L}{3\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} = 0{,}92$$

c) $$P(x,t) = \frac{1}{L}\left(\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1t/\hbar} - \sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2t/\hbar}\right)^*\left(\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1t/\hbar} - \sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2t/\hbar}\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\left(\sin\frac{\pi x}{L}e^{iE_1t/\hbar} - \sin\frac{2\pi x}{L}e^{iE_2t/\hbar}\right)\left(\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1t/\hbar} - \sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2t/\hbar}\right) =$$

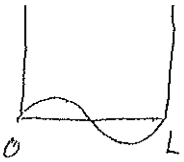
$$= \frac{1}{L}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} - \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\left(e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} + e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} - 2\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right]\right\}$$

Maximalt lokaliserad till höger vid $t=0$ $\Rightarrow$ maximalt lokaliserad till vänster

då $\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} = (2n+1)\pi$, dvs $t = \frac{(2n+1)\pi\hbar}{(E_2-E_1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

d) Efter mätning med resultatet E_2 befinner sig partikeln i tillståndet $|2\rangle$ och



$\langle x|2\rangle$

4.

a) S b) F c) F d) F e) F f) S

I c) har vi $\frac{E_p}{E_e} = \frac{\hbar^2\pi^2 40^2}{2m_p L^2}\cdot\frac{2m_e L^2}{\hbar^2\pi^2 1^2} = \frac{m_e}{m_p}\cdot 1600 = \frac{9,11\cdot 10^{-31}}{1,67\cdot 10^{-27}}\cdot 1600 = 0,87$

5.

a) Olika partiklar $P(a,b) = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle|^2 + |\langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

b) Identiska bosoner $P(a,b) = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle + \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

c) Identiska fermioner $P(a,b) = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

d) a: $P(a,b) = 2|\langle 1|a\rangle\langle 1|b\rangle|^2$

b: $P(a,b) = |\langle 1|a\rangle\langle 1|b\rangle + \langle 1|b\rangle\langle 1|a\rangle|^2 = 4|\langle 1|a\rangle\langle 1|b\rangle|^2$

c: $P(a,b) = 0$

e)

Möjliga kombinationer	Andel	$P(a,b)$
$|+a\rangle|+b\rangle$	$1/4$	$|\langle 1|+a\rangle\langle 2|+b\rangle - \langle 1|+b\rangle\langle 2|+a\rangle|^2$
$|-a\rangle|-b\rangle$	$1/4$	$|\langle 1|-a\rangle\langle 2|-b\rangle - \langle 1|-b\rangle\langle 2|-a\rangle|^2$
$|+a\rangle|-b\rangle$	$1/4$	$|\langle 1|+a\rangle\langle 2|-b\rangle|^2 + |\langle 1|-b\rangle\langle 2|+a\rangle|^2$
$|-a\rangle|+b\rangle$	$1/4$	$|\langle 1|-a\rangle\langle 2|+b\rangle|^2 + |\langle 1|+b\rangle\langle 2|-a\rangle|^2$

$$P(a,b) = \frac{1}{4}|\langle 1|+a\rangle\langle 2|+b\rangle - \langle 1|+b\rangle\langle 2|+a\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle 1|-a\rangle\langle 2|-b\rangle - \langle 1|-b\rangle\langle 2|-a\rangle|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}|\langle 1|+\rangle\langle 2|-\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 1|-\rangle\langle 2|+\rangle|^2$$

6. a) $\langle \psi | \psi \rangle = \psi^* \cdot \psi = \left\{ -\frac{i}{2} \langle +3/2 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +1/2 | - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -\frac{3}{2} | \right\} \left\{ \frac{i}{2} | +3/2 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | +1/2 \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} | -3/2 \rangle \right\}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ Ej normerad

Normera genom att multiplicera med $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{5}} |+3/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |+1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |-3/2\rangle$

b) Medelvärdet $\sum P(a) \cdot a = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\hbar\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\hbar\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{2}\hbar\right) =$

$= \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{6}{10}\right)\hbar = -\frac{1}{10}\hbar$

c) Amplituden $\langle \Phi | \psi \rangle = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \langle +3/2 | - \frac{1}{2} \langle -1/2 | \right\} \left\{ \frac{i}{\sqrt{5}} |+3/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |+1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |-3/2\rangle \right\} =$

$= \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$; Andelen $|\langle \Phi | \psi \rangle|^2 = \frac{3}{20}$

7. Vid $t=0$ har vi $C_1(0) = 0$, $C_2(0) = 1$ i $|\Phi\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$

Det ger C_1: $0 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \longrightarrow a = -b$

C_2: $1 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \longrightarrow a = 1,\ b = -1$

$C_1(t) = \frac{1}{2} e^{-iE_0 t/\hbar} \left(e^{iAt/\hbar} - e^{-iAt/\hbar} \right) = i e^{-iE_0 t/\hbar} \sin(At/\hbar)$

$C_2(t) = \frac{1}{2} e^{-iE_0 t/\hbar} \left(e^{iAt/\hbar} + e^{-iAt/\hbar} \right) = e^{-iE_0 t/\hbar} \cos(At/\hbar)$

Lägsta tillståndet $(E = E_0 - A)$ för $|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$

Projicera ; $\langle II | \Phi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle 1 | + \langle 2 | \right) \left(C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_1(t) + C_2(t) \right) \Rightarrow P(II) = \frac{1}{2} |C_1(t) + C_2(t)|^2 =$

$= \frac{1}{2} \left(\cos(At/\hbar) - i\sin(At/\hbar) \right) \left(\cos(At/\hbar) + i\sin(At/\hbar) \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(\cos^2(At/\hbar) + \sin^2(At/\hbar) \right) = \frac{1}{2}$

Alternativt: ~~[illegible]~~ Eftersom $|a| = |b|$ ~~och~~ har vi 50% för varje $e^{-i(E_0 - A)t/\hbar}$ och $e^{-i(E_0 + A)t/\hbar}$ och energin bevaras så har vi 50% chans att hitta $E = E_0 - A$ vid alla tider.