Omtentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 9.00-14.00, fredag 22/3 2013
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E: 18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.

Förklara kortfattat följande begrepp:

a) Paulis uteslutningsprincip

b) Stationärt tillstånd

c) Fermion

d) Bastillstånd

e) Vågfunktion

(5p)

2. Denna fråga motsvarar inlämningsuppgift A. Du kan välja att antingen svara på frågan eller använda dina poäng från inlämningsuppgiften.

Spinntillstånden för en elektron i z-led kan uttryckas med hjälp av tillstånden i x-led enligt följande:

$$|+z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle)$$

$$|-z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|+x\rangle + |-x\rangle)$$

Antag att vi har en elektron i spinntillståndet $|\Phi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}(0{,}5i|+z\rangle - |-z\rangle)$.

a) Vad är sannolikheten att vid mätning av spinnet i **x-led** få resultatet $+\hbar/2$, dvs värdet motsvarande det positiva tillståndet?

b) Om elektronen sänds igenom två Stern-Gerlach apparater enligt nedan, vad är sannolikheten att den kommer igenom?

$$\underset{\hat{z}}{\left\{\begin{array}{c} + \\ -| \end{array}\right\}} \quad \underset{\hat{x}}{\left\{\begin{array}{c} + \\ -| \end{array}\right\}}$$

(4p)

3. Denna fråga motsvarar inlämningsuppgift B. Du kan välja att antingen svara på frågan eller använda dina poäng från inlämningsuppgiften.

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L, det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

inom intervallet $0 < x < L$. Partikeln befinner sig i tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle)$$

a) Gör skisser av hur sannolikhetsfördelningen varierar i rummet för tillstånden $|1\rangle$, $|3\rangle$ och $|\Phi\rangle$.

b) Beskriv kvalitativt vad som kommer att hända med dessa sannolikhetsfördelningar när tiden går. (Du behöver alltså inte räkna ut något i denna uppgift.)

(4p)

4.

Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Rätt svar ger +1p, fel svar ger -1p, och inget svar ger 0p. Uppgiften kan totalt sett ge mellan 0 och 6p (dvs den ger inte minuspoäng).

a) Om en partikels tillstånd är en linjärkombination av två stationära tillstånd är sannolikhetstätheten alltid konstant med tiden.

b) Partiklar som har vilomassa har aldrig en våglängd.

c) Två protoner kan aldrig befinna sig i samma kvantmekaniska tillstånd.

d) I ett experiment med två Helium-4 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som vid samma experiment med Helium-3 kärnor.

e) En stråle av fermioner delar upp sig i ett udda antal strålar om den leds genom en Stern-Gerlach apparat.

f) Enligt klassisk fysik borde ljus inte uppvisa interferens.

5.

a) Man har mätt upp hastigheten hos en elektron till $2{,}9 \cdot 10^6$ m/s, med en noggrannhet av $\pm 0{,}06 \cdot 10^6$ m/s. Hur väl kan man som bäst bestämma elektronens läge?

b) Förklara kvalitativt (gärna genom att rita) hur man kan förstå Heisenbergs osäkerhetsrelation som en följd av att partiklar beskrivs som vågor.

(4p)

6.

Antag att vi har ett stort antal identiska partiklar med spinn 1. Samtliga befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{3}|-1\rangle - \frac{2}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle$. Bastillstånden motsvarar de möjliga mätvärdena $-\hbar$, 0 och $+\hbar$ på spinnets z-komponent.

a) Beräkna $\langle\psi|\psi\rangle$.

b) Vilket mätvärde får man oftast då spinnets z-komponent mäts?

c) Vad blir medelvärdet av spinnet för alla partiklar?

d) Hur stor andel av partiklarna passerar igenom en apparat som bara släpper igenom tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|-1\rangle)$?

(6p)

7.

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L, det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

inom intervallet $0 < x < L$.

a) Skriv ner ett normerat tillstånd där energierna E_1 och E_3 erhålls lika ofta, och för vilket partikeln med störst sannolikhet återfinns nära gropens mitt.

b) Är tillståndet du skrev ner ett stationärt tillstånd eller inte? Motivera ditt svar!

(4p)

8.

Beskriv dubbelspaltexperimentet med elektroner. Varför är detta så centralt inom kvantmekaniken?

(3p)

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

$p = \hbar k \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Kvantformalism

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i$

$\sum_i |C_i|^2 = 1$

$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$

$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ (eller $|$)

$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$

Spinn 1/2

$|+\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x\,\right)$

$|-\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,-\;|+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x\,\right)$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle \;+\; C_2(t)|2\rangle$

$C_1(t) = \dfrac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \dfrac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$

$C_2(t) = \dfrac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \dfrac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$

Energitillstånden:

$|I\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|1\rangle \;-\; |2\rangle\,\right)$ energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|1\rangle \;+\; |2\rangle\,\right)$ energi $E_0 - A$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Lösningsförslag Omtentamen

Kvantfysikens principer 22/3 2013

1)

a) Två fermioner av samma slag kan inte samtidigt vara i samma kvantmekaniska tillstånd.

b) Tillstånd med välbestämd energi E. Alla sth-amplituder i ett stationärt tillstånd har samma tidsutveckling: $e^{-iEt/\hbar}$

c) Partikel med halvtaligt spinn

d) En fullständig uppsättning bastillstånd för vilka $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Ett godtyckligt tillstånd är en superposition av bastillstånden

e) Beskriver amplituden att hitta en partikel i en viss punkt i rummet. $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

2)

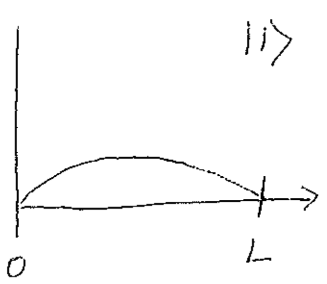
a) $$P = |\langle +x|\phi\rangle|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\left(0{,}5i\,\langle +x|+z\rangle - \langle +x|-z\rangle\right)\right|^2 =$$

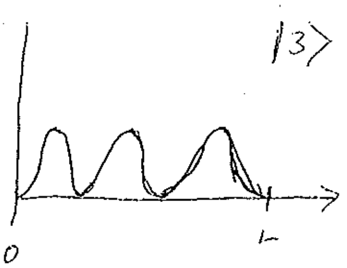
$$= \frac{4}{5}\left|0{,}5i\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8} = \underline{\frac{1}{2}}$$

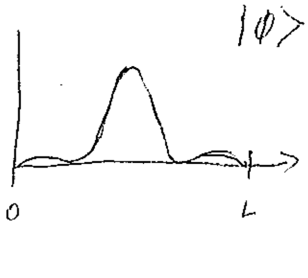
b)

$$P = |\langle +x|+z\rangle\langle +z|\phi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2i}{2\sqrt{5}}\right|^2 = \underline{\frac{1}{10}}$$

3) a)

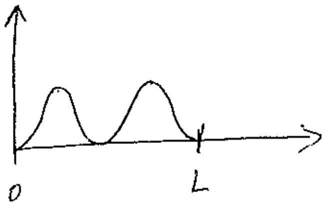






3/ b/ $|1\rangle$ och $|3\rangle$ är stationära tillstånd, därmed ändras inte deras slh-fördelning. För $|\phi\rangle$ kommer tidsutvecklingen av $|1\rangle$ och $|3\rangle$ vara olika: $e^{-iE_i t/\hbar}$

Fasen mellan dem ändras, vilket ger att sannolikheten pendlar mellan utseendet i a) och



4/ a/ falskt b/ falskt c/ sant d/ sant e/ falskt f/ falskt

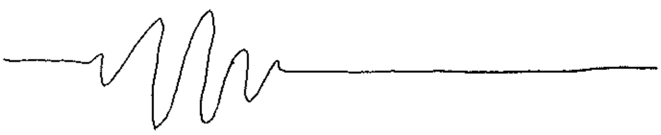
5/ a) $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x}$

$\Delta p_x \doteq m_e \Delta V_x \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2 m_e \Delta V_x} \approx 9{,}6 \cdot 10^{-10}\ m$

b) För partiklar är rörelsemängden kopplad till våglängden genom $p = \frac{h}{\lambda}$. För att mäta p noggrannt krävs då många våglängder, vilket minskar bestämningen av x:

p välbestämt
x obestämt

p obestämt
x välbestämt



p och x någorlunda bestämda

6.

a) $\langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{9}\langle -1|-1\rangle + \frac{4}{6}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{9}\langle 1|1\rangle = 1$

b) $P_n = |\langle n|\psi\rangle|^2 \Rightarrow P_1 = \frac{2}{9}$

$P_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ Värdet 0 erhålls oftast.

$P_{-1} = \frac{1}{9}$

c) Medelvärdet: $\frac{2}{9}\cdot\hbar - \frac{1}{9}\hbar = \frac{\hbar}{9}$

d) $|\langle \phi|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{-2}{\sqrt{12}} + \frac{i}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{7}{18}}}$

7

a) Till exempel $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right)$

b) Nej, de två termerna har olika energier och därmed olika tidsutveckling. Sannolikhetsfunktionen kommer därför att variera med tiden → ej stationärt.

8. För beskrivning se t.ex Feynman s. 1-4 och framåt.

Centrala aspekter som berörs av experimentet är

- interferens
- våg/partikeldualitet
- osäkerhetsrelationen och mätningens påverkan.