Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 17.00-22.00, torsdag 20/12 2012
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E: 18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.

Besvara följande frågor kortfattat (högst ett par meningar):

a) Det kan maximalt finnas två elektroner på den lägsta energinivån av en atom. Vad skiljer dessa åt? (1p)

b) Vilken aspekt i dubbelspaltexperimentet tyder på att elektroner är partiklar? Vad i experimentet tyder på att de är vågor? (2p)

c) Varför består ljuset från en exciterad atomgas enbart av vissa specifika våglängder? (2p)

2. Denna fråga motsvarar inlämningsuppgift A. Du kan välja att antingen svara på frågan eller använda dina poäng från inlämningsuppgiften.

Spinntillstånden för en elektron i z-led kan uttryckas med hjälp av tillstånden i x-led enligt följande:

$$|+z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle)$$

$$|-z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|+x\rangle + |-x\rangle)$$

Antag att vi har en elektron i spinntillståndet $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|+z\rangle + 2|-z\rangle)$.

a) Vad är sannolikheten att vid mätning av spinnet i z-led få resultatet $-\hbar/2$, dvs värdet motsvarande det negativa tillståndet?

b) Om elektronen sänds igenom två Stern-Gerlach apparater enligt nedan, vad är sannolikheten att den kommer igenom?

$$\underset{\hat{x}}{\left\{ \begin{array}{c} + \\ -| \end{array} \right\}} \quad \underset{\hat{z}}{\left\{ \begin{array}{c} + \\ -| \end{array} \right\}}$$

(4p)

3. Denna fråga motsvarar inlämningsuppgift B. Du kan välja att antingen svara på frågan eller använda dina poäng från inlämningsuppgiften.

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L, det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

inom intervallet $0 < x < L$. Partikeln befinner sig i tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|3\rangle - i|4\rangle + |7\rangle)$$

a) Vilka är de möjliga utfallen av en energimätning på systemet, och med vilka sannolikheter erhålls de möjliga resultaten? (1p)

b) Vad händer med partikelns tillstånd om man utför en mätning av energin? (1p)

c) Förklara varför energitillstånd även kallas stationära tillstånd. Är $|\Phi\rangle$ ett stationärt tillstånd? (2p)

4.

Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Rätt svar ger +1p, fel svar ger -1p, och inget svar ger 0p. Uppgiften kan totalt sett ge mellan 0 och 6p (dvs den ger inte minuspoäng).

a) En proton som rör sig snabbt har kortare våglängd än en som rör sig långsamt.

b) Ökad massa ger större våglängd.

c) Två fotoner kan aldrig befinna sig i samma kvantmekaniska tillstånd.

d) I ett experiment med två Helium-3 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som vid samma experiment med Helium-4 kärnor.

e) En stråle av bosoner delar upp sig i ett udda antal strålar om den leds genom en Stern-Gerlach apparat.

f) Enligt klassisk fysik borde ljus inte uppvisa interferens.

5.

Vi tänker oss att vi har ett stort antal väteatomer som alla är i grundtillståndet. Radien på väteatomen är då ungefär en Bohrradie, dvs 0,53 Å. För varje atom mäter vi nu elektronens fart (alltså enbart beloppet av hastigheten). Om mätfelet är så litet att det kan försummas, kommer vi mäta samma hastighet på alla atomer? Varför eller varför inte? Om svaret är nej, hur stor spridning på mätvärdena förväntar du dig?

(4p)

6.

Antag att vi har ett stort antal identiska partiklar med spinn 1. Samtliga befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|-1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$. Bastillstånden motsvarar de möjliga mätvärdena $-\hbar$, 0 och $+\hbar$ på spinnets z-komponent.

a) Beräkna $\langle\psi|\psi\rangle$.

b) Hur stor andel av partiklarna ger värdet $s_z = +\hbar$ vid mätning?

c) Vad blir medelvärdet av spinnet för alla partiklar?

d) Hur stor andel av partiklarna passerar igenom en apparat som bara släpper igenom tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$?

(6p)

7.

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L, det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

inom intervallet $0 < x < L$.
Betrakta tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|3\rangle - |4\rangle + i|7\rangle)$$

Uppskatta sannolikheten att hitta partikeln inom intervallet $\frac{L}{2} - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + \frac{\Delta x}{2}$, där $\Delta x = \frac{L}{1000}$.

(4p)

8.

Förklara kortfattat **ett** av följande kvantmekaniska begrepp:

a) Snärjning

b) Schrödingers katt

(3p)

Lösningsförslag Kvantfysikens principer 20/12

1. a) Riktningen på deras spinnvektor. Den ena har $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ den andra $S_z = -\frac{\hbar}{2}$.

b) Att elektronerna träffar skärmen en och en i lika stora "paket" tyder på att de är partiklar. Interferensmönstret som byggs upp tyder på att de är vågor.

c) Ljuset avges då elektroner i atomen förlorar energi. Elektronerna är bundna och deras energinivåer kvantiserade. Eftersom det endast finns vissa möjliga energisteg elektronerna kan ta, kan fotonerna som skickas ut endast ha vissa energier och därmed våglängder.

2. a)
$$P(s_z = -\hbar/2) = |\langle +z|\Phi\rangle|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5} = 80\%$$

b) Utnyttja sambandet mellan baserna för att skriva

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-|+x\rangle + 3|-x\rangle\right)$$

Den sökta sannolikheten är

$$P = \left|\langle +z|+x\rangle\langle +x|\Phi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{1}{20} = 5\%$$

3 a) Man kan erhålla resultaten

$$\begin{cases} E = E_3 = \dfrac{9\pi^2\hbar^2}{2mL} & \text{med} \quad P(E=E_3) = \left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \dfrac{1}{3} \\[2ex] E = E_4 = \dfrac{16\pi^2\hbar^2}{2mL} & \text{med} \quad P(E=E_4) = \left|\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \dfrac{1}{3} \\[2ex] E = E_7 = \dfrac{49\pi^2\hbar^2}{2mL} & \text{med} \quad P(E=E_7) = \left|\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right|^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

b) Om man gör en mätning av energin kollapsar tillståndet $|\Phi\rangle$ till det energitillstånd som motsvarar energin man får vid mätningen. Får vi t.ex. $E = E_4$ vid en mätning befinner sig partikeln efteråt i tillståndet $|4\rangle$.

c) Energitillstånd kallas stationära tillstånd eftersom alla <u>sannolikheter</u> är oberoende av tiden när man befinner sig i ett tillstånd med bestämd energi. $|\Phi\rangle$ är inte ett energitillstånd eftersom vi inte kan säga vilket värde på energin vi får vid en mätning på systemet.

4. a) s b) f c) f d) f e) s f) f

5. Osäkerhetsprincipen kopplar Δx och Δp_x, så om vi vet läget (x) noggrant får vi stor spridning på rörelsemängden och därmed farten. Vi kan uppskatta spridningen med

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot m_e \cdot \Delta v_x \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Sätt $\Delta x \sim 0{,}5\,\text{Å} \Rightarrow \Delta v_x \gtrsim \dfrac{\hbar}{2 m_e \Delta x} \sim 10^6\ \text{m/s}$

6. a) $\langle\psi|\psi\rangle = -\frac{i^2}{2}\langle -1|-1\rangle + \frac{1}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{4}\langle 1|1\rangle = 1$

b) $P(s_z = +\hbar) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$, dvs $\frac{1}{4}$ av partiklarna ger $s_z = +\hbar$.

c) Medelvärdet $= P(s_z = +\hbar)\cdot\hbar + P(s_z = 0)\cdot 0 + P(s_z = -\hbar)(-\hbar) =$

$$= |\langle 1|\psi\rangle|^2\cdot\hbar + |\langle 0|\psi\rangle|^2\cdot 0 + |\langle -1|\psi\rangle|^2\cdot(-\hbar) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\hbar \cdot \frac{1}{2}(-\hbar) = -\frac{\hbar}{4}$$

d) $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle -1|-1\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{3}{8}$

7. Vågfunktionen för $|\Phi\rangle$ är:

$$\phi(x) = \langle x|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\langle x|3\rangle - \langle x|4\rangle + i\langle x|7\rangle\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3L}}\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right)\right)$$

Eftersom intervallet Δx är väldigt litet i förhållande till brunnens bredd L, kan vi approximera sannolikheten med:

$$P\left(\frac{L}{2} - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx \left|\phi\left(\frac{L}{2}\right)\right|^2 \cdot \Delta x =$$

$$= \left|\sqrt{\frac{2}{3L}}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{L}\cdot\frac{L}{2}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{L}\cdot\frac{L}{2}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{L}\cdot\frac{L}{2}\right)\right)\right|^2 \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{2}{3L}\left|\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(2\pi) + i\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right|^2 \cdot \Delta x = \frac{2}{3L}\left|-1 - i\right|^2 \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{2}{3L} \cdot 2 \cdot \frac{L}{1000} = \frac{4}{3000} \approx 1{,}3‰$$

8. a) Snärjning är en kvantmekanisk korrelation mellan två system, som medför att information om det ena systemet finns i det andra. Ex: kollission mellan e^- och e^+ där $p_{före} = 0$. Mätning av elektronens rörelsemängd ger information om protonens. Medför icke-lokalitet i kvantmekaniken.

b) Schrödingers katt är ett tankeexperiment där en katt placeras i en låda med ett radioaktivt preparat och en giftbehållare. Om preparatet sönderfaller frigörs giftet och katten dör. Enligt kvantmekaniken kommer kattens tillstånd innan lådan öppnas vara en superposition av levande och död! Belyser bland annat observatörens/mätningens roll.

Inlämningsuppgift A

a) $|-x\rangle = |+z\rangle\langle +z|-x\rangle + |0z\rangle\langle 0z|-x\rangle + |-z\rangle\langle -z|-x\rangle =$

$= \frac{1}{2}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0z\rangle + \frac{1}{2}|-z\rangle$

b) $P = |\langle 0z|-x\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

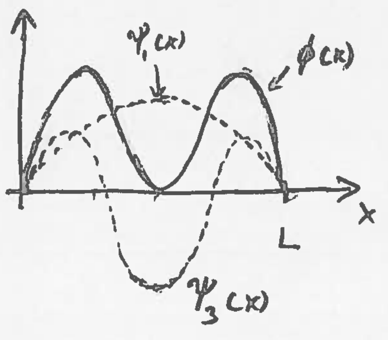
c) $\langle -x|+z\rangle = \langle +z|-x\rangle^* \Rightarrow P = |\langle -x|+z\rangle|^2 = |\langle +z|-x\rangle^*|^2 = \frac{1}{4}$

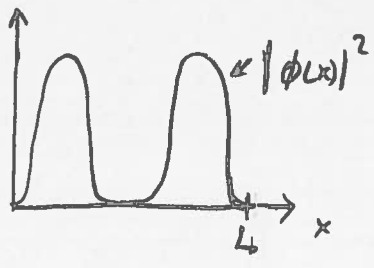
d) $P = |\langle -x|0z\rangle\langle 0z|-x\rangle + \langle -x|+z\rangle\langle +z|-x\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{9}{16}$

Inlämningsuppgift B

a) Till exempel: $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)$

b) $P(x) = |\phi(x)|^2 dx \qquad \phi(x) = \langle x|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle x|1\rangle + \langle x|3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_3(x)\right)$





c) När tiden går kommer sannolikhetsfördelningen $|\phi(x)|^2$ att oscillera mellan utseendet ovan och en större topp i mitten.