

Tentamen, Kvantfysikens principer FK2003, 7,5 hp

Tid: 9.00-14.00, måndag 12/3 2012

Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

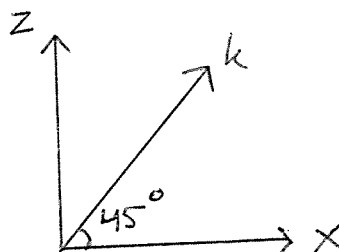
Maxpoäng är 50 p.

Betygsgränser: F: < 23, Fx: 23, E: 25, D: 30, C: 35, B: 42, A: 47.

Lycka till!! /Emma W

1. Blandade frågor

- Beskriv hur våg-partikel-dualiteten hos elektroner yttrar sig i dubbelspaltexperimentet. (4p)
- Ge konkreta exempel på en fermion och en boson. (2p),
- Redogör kortfattat för hur en Stern-Gerlach apparat kan användas för att påvisa att kvantmekaniskt spinn är en kvantiserad storhet. (3p)
- Om man hos en elektron mäter spinnvektorns komponent i z-led, S_z , är de möjliga utfallen $S_z = \frac{\hbar}{2}$ och $S_z = -\frac{\hbar}{2}$. Om man mäter spinnvektorns komponent i x-led, är de möjliga utfallen $S_x = \frac{\hbar}{2}$ och $S_x = -\frac{\hbar}{2}$. Vilka mätvärden kan man få om man mäter spinnvektorns komponent i 'k-riktningen', som visas i bilden nedan? (2p)



2. Osäkerhetsrelationen

- a) Man har uppmätt hastigheten hos en elektron till $4,8 \cdot 10^6$ m/s med noggrannheten $\pm 0,05 \cdot 10^6$ m/s. Hur väl kan man som bäst känna till elektronens position, d.v.s. hur utsmetad är elektronen som minst? (3p)
- b) Förklara kvalitativt, gärna med hjälp av en bild, hur man kan förstå Heisenbergs osäkerhetsrelation som en följd av att 'partiklar' måste beskrivas som vågor. (4p)

3. Amplituder och identiska/särskiljbara partiklar

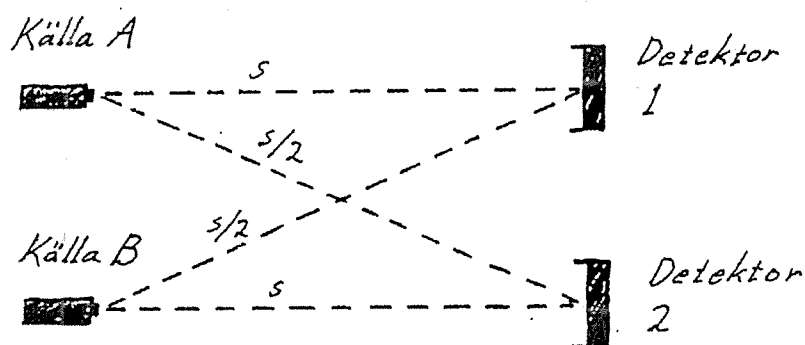
Figuren nedan visar en uppställning med två partikelkällor, *A* och *B*, samt två detektorer, 1 och 2. Här följer några amplituder för att partiklar ska gå från respektive källa till respektive detektor (*s* kan antas vara ett reellt tal):

$$A \rightarrow 1 : s$$

$$A \rightarrow 2 : s/2$$

$$B \rightarrow 1 : s/2$$

$$B \rightarrow 2 : s$$



- a) Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna från *A* och *B* är identiska bosoner? (3p)
- b) Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna från *A* och *B* är identiska fermioner? (3p)
- c) Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna från *A* och *B* är av olika slag? (3p)

4. Två tillståndssystem

En viss partikel kan befinna sig i två olika lägen, 1 och 2. Motsvarande tillstånd betecknar vi $|1\rangle$ respektive $|2\rangle$. Partikeln har två olika energitillstånd,

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

med energi E_I respektive E_{II} . Om man startar med partikeln i tillstånd $|1\rangle$ tar det tiden τ tills den har tunnlat över och helt säkert återfinns i tillstånd $|2\rangle$. Vilka av följande påståenden är korrekta och vilka är felaktiga? **Inga motiveringar krävs.** (Varje deluppgift ger 2 poäng för rätt svar, -2 poäng för fel svar och 0 poäng för inget svar. Uppgiften som helhet kan *inte* ge negativ poäng, och maximalt 10 poäng.)

- Om man startar partikeln i läge 2 och efter tiden τ mäter dess position blir svaret helt säkert läge 1.
- Om partikeln befinner sig i energitillstånd $|II\rangle$ är sannolikheten 50% att finna den i läge 1.
- Om partikeln befinner sig i energitillstånd $|II\rangle$ är sannolikheten efter tiden τ 50% att finna den i läge 1.
- Antag att partikeln befinner sig i energitillstånd $|I\rangle$ och att man mäter dess position och finner att den befinner sig i läge 1. Om man därefter mäter dess energi får man helt säkert resultatet E_I .
- Ju mindre tunnlingstiden τ är, desto mindre är energiskillnaden $E_I - E_{II}$.

5. Oändlig potentialgrop och tidsutveckling

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L , det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

inom intervallet $0 < x < L$.

- a) Betrakta tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

Skissa vågfunktionen för $|\Phi\rangle$, d.v.s. $\Phi(x)$. Skissa även $|\Phi(x)|^2$. (3p)

- b) Var är det troligast att man hittar partikeln om man gör en mätning av dess läge? Var noga med att redogöra för hur du kommer fram till ditt svar. (3p)
- c) Hur ser tidsutvecklingen av tillstånden $|1\rangle$, $|2\rangle$ och $|\Phi\rangle$ ut, d.v.s. vad är $\Psi_1(x, t)$, $\Psi_2(x, t)$ och $\Phi(x, t)$? (4p)
- d) Var är det troligast att hitta partikeln vid tiden $t = \pi\hbar/(E_2 - E_1)$? (3p)

Kvantfysikens principer:

- 1.) a) När man låter elektroner passera två spalter och sedan träffa en skärm, uppstår ett interferensmönster på skärmen. Interferens är ett typiskt våg beteende och dubbelspaltexperimentet visar därför att elektroner har vågegenskaper. Å andra sidan, när man detekterar en elektron (t.ex. genom att lysa på den med en lamp, eller ^{låta den} träffa detektorn vid skärmen) hittar man dem alltid som lila stora "klumpar"; man hittar aldrig en halv elektron t.ex. I detta avseende beter sig elektroner som partiklar. En märklig aspekt av experimentet är, att om man försöker ta reda på vilket väg elektronen tog från källan till skärmen, försvinner interferensen och elektronerna beter sig som partiklar. När man inte betraktar elektronerna beter de sig som vågor. Sammanfattningsvis har elektroner både våg- och partikelegenskaper, vilket är innebörden i våg-partikel-dualiteten.
- b) Exempel på fermioner: elektron, neutron, proton, ...
+1 - bosoner: foton, alfapartikel (He-kärna), ...
- c) En SG-apparat innehåller ett varierande magnetfält som gör att partiklar böjs av åt olika håll och olika mycket beroende på z-komponenten av partiklarnas spin, S_z . Om man skickar in kvant-

mekaniska partiklar genom en SG-apparat, delar partikelstrålen upp sig i diskreta strålar (hur många beror på partikulornas spinntal). Detta innebär att S_z är kvantiserad, d.v.s. bara kan anta ett diskret antal värden.

d) Det spelar ingen roll i vilken riktning man mäter spinntkomponenten (man kan ju välja sin z-axel hur man vill), så de möjliga mätvärdena är $S_z = \frac{\hbar}{2}$ och $S_z = -\frac{\hbar}{2}$.

2.) a) Vi använder OR; $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow m \Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$
 $\Leftrightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2m \Delta v}$

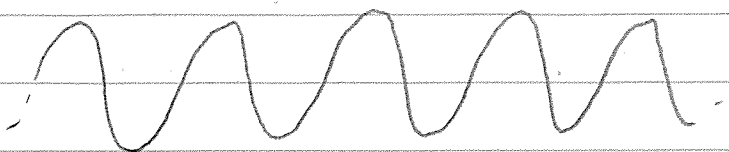
I detta fall är $\Delta v = 0,1 \cdot 10^6$ m/s och vi söker osäkerheten Δx i elektronens position:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m \Delta v} \approx 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,5 \text{ nm}$$

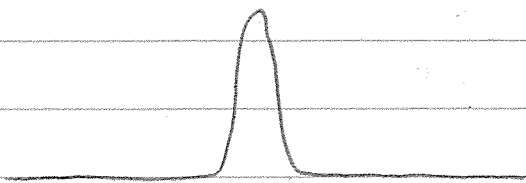
b) För vågor gäller: ju mer välbestämd våglängden är, desto mindre välbestämd är vågens position, och trögtom. Enligt KM är en partikel rörelsemängd kopplad till dess våglängd, vilket alltså innebär att ju noggrannare man känner till en partikels rörelsemängd, desto mindre kan man känna till dess läge.

Principen för vågor kan man förklara med

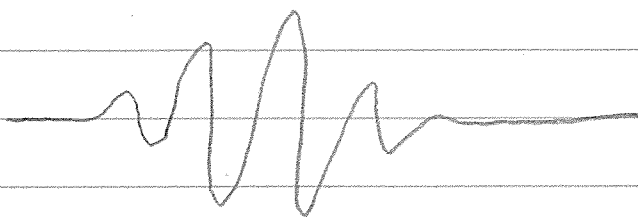
hjälp av några bilder:



Välbestämt λ ,
obestämd position



Obestämt λ ,
välbestämt position



Ganska välbestämt λ ,
ganska välbestämt
position

3.)

$$\text{Vi mår beteckningarna } \begin{cases} \langle 1|A \rangle = \frac{5}{2} \\ \langle 2|A \rangle = \frac{5}{2} \\ \langle 1|B \rangle = \frac{5}{2} \\ \langle 2|B \rangle = 5 \end{cases}$$

Amplituden för att en partikel från A och en partikel från B ska gå till detektor 1 är då t.ex.

$$\langle 1|A \rangle \langle 1|B \rangle = \frac{5^2}{2}$$

Vi antar att källa A och B skickar ut varsin partikel. Träff i båda detektorerna får vi då om partikel A går till 1 och part. B går till 2 eller

eller +1 - 2 -11 - 1.

a) Om partiklarna är identiska beroner ska vi lägga ihop amplituder med ett plus-tecken då vi byter plats på partiklarna. Sannolikheten blir:

$$\begin{aligned} P &= |\langle 1|A\rangle\langle 2|B\rangle + \langle 2|A\rangle\langle 1|B\rangle|^2 = \\ &= \left| s^2 + \frac{s^2}{4} \right|^2 = \left| \frac{5s^2}{4} \right|^2 = \frac{25s^4}{16} \end{aligned}$$

\uparrow
 s reellt

b) Här ska vi först subtrahera amplituderna:

$$\begin{aligned} P &= |\langle 1|A\rangle\langle 2|B\rangle - \langle 2|A\rangle\langle 1|B\rangle|^2 = \\ &= \left| s^2 - \frac{s^2}{4} \right|^2 = \left| \frac{3s^2}{4} \right|^2 = \frac{9s^4}{16} \end{aligned}$$

\uparrow
 s reellt

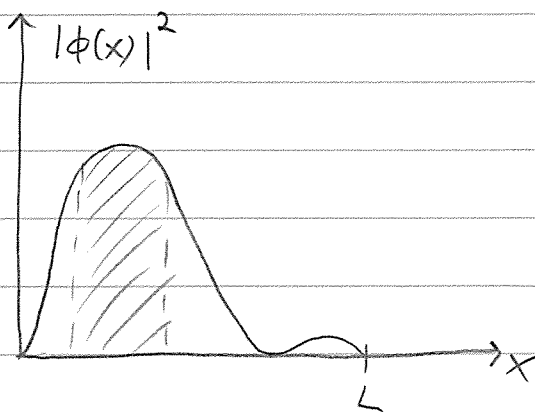
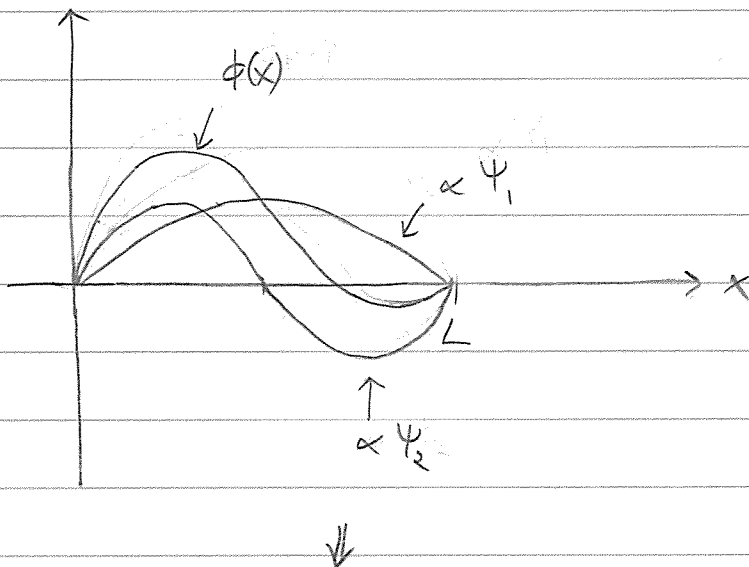
c) När partiklarna är särskiltbara, adderar vi respektive sannolikheter:

$$\begin{aligned} P &= |\langle 1|A\rangle\langle 2|B\rangle|^2 + |\langle 2|A\rangle\langle 1|B\rangle|^2 = \\ &= |s^2|^2 + \left| \frac{s^2}{4} \right|^2 = s^4 + \frac{s^4}{16} = \frac{17s^4}{16} \end{aligned}$$

\uparrow
 s reellt

- 4.)
- a) Korrekt
 - b) Korrekt
 - c) Korrekt
 - d) Fel
 - e) Fel

5.) a) $\phi(x) = \langle x | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | 1 \rangle + \langle x | 2 \rangle) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} (\sin(\frac{\pi x}{L}) + \sin(\frac{2\pi x}{L})) =$



b) Enligt sannolikhets-
 tolningen är det
 troligast att hitta
 partikeln där $|\phi(x)|^2$
 är stor, d.v.s. inom
 det streckade området
 i figuren är chansen
 störst.

c) $|1\rangle$ och $|2\rangle$ är energitillstånd, vilket medför att

$$\begin{cases} \psi_1(x,t) = e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x,0) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_1 t/\hbar} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \psi_2(x,t) = e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x,0) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_2 t/\hbar} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(x,t) &= c_1(t) \psi_1(x) + c_2(t) \psi_2(x) = \\ &= c_1(0) \psi_1(x,t) + c_2(0) \psi_2(x,t) = \\ &= c_1(0) e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + c_2(0) e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_1 t/\hbar} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{-iE_2 t/\hbar} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_1 t/\hbar} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{-iE_2 t/\hbar} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

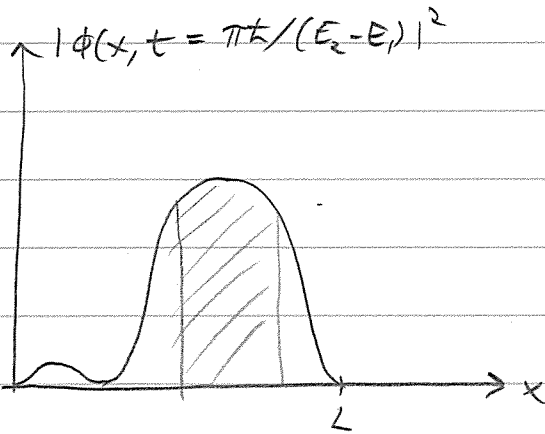
d) Enligt ovan, $\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(x,t = \pi\hbar/(E_2 - E_1)) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_1 \pi\hbar/\hbar(E_2 - E_1)} \psi_1(x) + e^{-iE_2 \pi\hbar/\hbar(E_2 - E_1)} \psi_2(x) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi E_1/(E_2 - E_1)} \psi_1(x) + e^{-i\pi E_2/(E_2 - E_1)} \psi_2(x) \right) = \\ &= e^{-i\pi E_1/(E_2 - E_1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x) + e^{-i\pi(E_2 - E_1)/(E_2 - E_1)} \psi_2(x) \right) = \\ &= e^{-i\pi E_1/(E_2 - E_1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x) - \psi_2(x) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\phi(x,t = \pi\hbar/(E_2 - E_1))|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) - \psi_2(x)) \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \right|^2$$

analogt med räkningen i a) och b) blir nu:



och det är troligare
att hitta partikeln i
den högra halvan
av gropen.