Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 17.00-22.00, tisdag 20/12 2011
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.

Maxpoäng är 60 p.
Betygsgränser: F: $<$ 27, Fx: 27, E: 30, D: 36, C: 42, B: 51, A: 57.
Inlämningsuppgifterna ger maximalt 6 bonuspoäng.

Lycka till!! /Emma W

1. Blandade frågor

Svara kortfattat på följande frågor:

a) Vad säger Paulis uteslutningsprincip (Pauliprincipen)? (2p)

b) Vad innebär ett snärjt tillstånd? Ge ett konkret exempel. (4p)

c) Vad säger Heisenbergs osäkerhetsrelation? (3p)

2. Dubbelspaltexperimentet

Studera en variant av dubbelspaltexperimentet, skissad i figuren. Elektroner skickas ut från källan s och kan sedan träffa skärmen till höger. Intill spalten betecknad b har en mycket kortvågig ljuskälla och en fotondetektor placerats.

a) Ange i Diracnotation ett uttryck för sannolikheten att en elektron som skickas ut från källan s ska träffa skärmen i punkten x. (5p)

b) Vad blir sannolikheten om vi istället använder en mycket långvågig ljuskälla vid spalt b? (5p)

3. Stern-Gerlach-apparaten

Här är amplituderna för att en spinn-1-partikel i de tre möjliga x-spinntillstånden ($|+x\rangle$, $|0\ x\rangle$ och $|-x\rangle$) ska återfinnas i ett av de tre möjliga z-spinntillstånden ($|+z\rangle$, $|0\ z\rangle$ och $|-z\rangle$):

$$\langle +z|+x\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle +z|0\ x\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \langle +z|-x\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle 0\ z|+x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \langle 0\ z|0\ x\rangle = 0 \qquad \langle 0\ z|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle -z|+x\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle -z|0\ x\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \langle -z|-x\rangle = \frac{1}{2}$$

Betrakta kombinationen av tre stycken på varandra följande SG-apparater nedan. Partiklarna färdas från vänster till höger.

$$\underset{\hat{z}}{\left\{\begin{array}{cc} + & | \\ 0 & | \\ - & \end{array}\right\}} \quad \underset{\hat{x}}{\left\{\begin{array}{cc} + & \\ 0 & \\ - & | \end{array}\right\}} \quad \underset{\hat{z}}{\left\{\begin{array}{cc} + & \\ 0 & | \\ - & | \end{array}\right\}}$$

a) I vilket kvantmekaniskt tillstånd befinner sig partiklarna som kommer ut ur den första apparaten? (Ingen motivering krävs.) (2p)

b) Hur stor andel av partiklarna som kommer ut ur den första apparaten tar sig också igenom de två efterföljande? (4p)

c) Hur stor andel kommer igenom om vi tar bort blockeringen i $\hat{x}$-apparaten? (4p)

d) Redogör för hur SG-apparater i allmänhet kan användas för att ta reda på om en viss typ av elektriskt laddade partiklar är bosoner eller fermioner. (4p)

4. Ammoniakmolekylen

a) Vi utför tre stycken mätningar, direkt efter varandra, på en ammoniakmolekyl. Den första mätningen avser kväveatomens position i förhållande till planet av väteatomer, och vi hittar den i tillståndet "uppe". Sedan utför vi en mätning av ammoniakmolekylens energi och får $E = E_I = E_0 + A$. Den tredje mätningen avser återigen kväveatomens läge. Vad kan vi säga om utfallet av den tredje mätningen? (4p)

b) Efter att vi har utfört den tredje mätningen, kommer molekylen att befinna sig i ett stationärt tillstånd eller ej? (Kom ihåg att motivera dina svar - enbart ja eller nej ger inga poäng.) (3p)

5. Oändlig potentialgrop och tidsutveckling

Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L, det vill säga

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)$$

inom intervallet $0 < x < L$.

a) Skriv ner ett normaliserat tillstånd för vilket gäller att man vid mätning av partikelns energi erhåller E_5 i 75% av fallen, och E_6 i 25% av fallen. (4p)

b) Betrakta tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Skissa vågfunktionen för $|\Phi\rangle$, d.v.s. $\Phi(x)$. Skissa även $|\Phi(x)|^2$. (4p)

c) Förklara i ord och med hjälp av ditt svar på b) ungefär var det är troligast att man hittar partikeln om man gör en mätning av dess läge. (4p)

d) Vilka resultat kan man få om man gör en mätning av partikelns energi, och med vilka sannolikheter erhålls dessa? (4p)

e) Hur ser tidsutvecklingen av tillstånden $|1\rangle$, $|2\rangle$ och $|\Phi\rangle$ ut, d.v.s. vad är $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$ och $\Phi(x,t)$? (4p)

Lösningar tentamen 20/12 2011:

1. a) Paulis uteslutningsprincip säger att två fermioner inte kan uppta samma kvantmekaniska tillstånd.

b) Ett snärjt tillstånd är ett tillstånd som kopplar ihop egenskaperna hos två system så att om man känner till egenskapen hos det ena, känner man också till egenskapen hos det andra.

Ett exempel är de två fotonerna i Bell-experimentet för vilka det totala spinnet är noll. Det snärjda tillståndet kan vi skriva

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\underset{\text{foton 1}}{\uparrow}\underset{\text{foton 2}}{\downarrow}\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

Om vi gör en mätning av spinnet hos säg foton 1 och finner den i $\uparrow$, kollapsar det snärjda tillståndet till $|\uparrow\downarrow\rangle$, och spinnet hos foton 2 är alltså bestämt till $\downarrow$.

Ett annat exempel är snärjningen mellan katten och det radioaktiva preparatet i tankeexperimentet "Schrödingers katt".

c) Heisenbergs osäkerhetsrelation (för läge och rörelsemängd) lyder $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ och innebär att det finns en gräns för hur välbestämda läget och rörelsemängden i någon riktning (här kallad x-riktningen) kan vara samtidigt.

(2) a) Att ljuskällan är mycket kortvågig innebär att sannolikheten är mycket liten att en foton sprids från spalt a till detektorn, så vi kan anta att om vi får en blixt i fotondetektorn så är det en detektion av en elektron vid spalt b. Vi kan alltså skilja fallet att elektronen går via spalt a från fallet att den går via spalt b.

Det finns fyra sätt för en elektron att gå från s till x;

i) Via spalt 1 och a, amplitud $\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|s\rangle \equiv \phi_i$
ii) 1 b $\langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|s\rangle \equiv \phi_{ii}$
iii) 2 a $\langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|s\rangle \equiv \phi_{iii}$
iv) 2 b $\langle x|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|s\rangle \equiv \phi_{iv}$

Vi kan i detta fall skilja ii) och iv) från i) och iii), så sannolikheterna för dessa alternativ ska adderas. Vi kan däremot inte skilja i) från iii), och inte heller ii) från iv) så här ska vi först addera amplituderna. Sammantaget blir sannolikheten

$$P(x) = |\phi_i + \phi_{iii}|^2 + |\phi_{ii} + \phi_{iv}|^2$$

b) Om en mycket långvågig fyrhålla används, är upplösningen så dålig att vi inte kan avgöra om blixten kom från spalt a eller b. Alla fallen i) - iv) är därför icke särskiljbara, och vi får addera alla amplituder innan vi tar beloppskvadraten för att få ut sannolikheten;

$$P(x) = |\phi_i + \phi_{ii} + \phi_{iii} + \phi_{iv}|^2$$

3. a) Partiklarna befinner sig i $|-z\rangle$.

b) Sannolikheten att en partikel startar i $|-z\rangle$ och hamnar i $|+z\rangle$ via antingen $|+x\rangle$ eller $|0x\rangle$ är

$$P = |\langle +z|+x\rangle\langle +x|-z\rangle + \langle +z|0x\rangle\langle 0x|-z\rangle|^2 =$$

$$= |\langle +z|+x\rangle\langle -z|+x\rangle^* + \langle +z|0x\rangle\langle -z|0x\rangle^*|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right|^2 = \left|-\frac{1}{4}\right|^2 = \frac{1}{16}$$

Andelen som kommer ut ur den sista apparaten är alltså $\frac{1}{16}$.

c) Om vi tar bort blockeringen får vi en helt öppen $\hat{x}$-apparat, och sannolikheten för att en partikel ska ta sig igenom blir samma som om $\hat{x}$-apparaten inte hade varit där;

$P = |\langle +z|-z\rangle|^2 = 0$ eftersom $|-z\rangle$ och $|+z\rangle$ är bastillstånd som uppfyller $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.

(Man kan också använda enhetsoperatorn:

$$P = |\langle +z|+x\rangle\langle +x|-z\rangle + \langle +z|0x\rangle\langle 0x|-z\rangle + \langle +z|-x\rangle\langle -x|-z\rangle|^2 =$$

$$= |\langle +z|\underbrace{\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)}_{=\mathbb{1}}|-z\rangle|^2 = |\langle +z|-z\rangle|^2 = 0\ )$$

d) Antalet strålar som partiklarna delar upp sig i när de passerar genom en SG-apparat är lika många som antalet möjliga mätvärden av S_z för partikeln.

De möjliga mätvärdena av S_z är

$S_z = -s\hbar, -(s-1)\hbar, \ldots, (s-1)\hbar, s\hbar \leftarrow 2s+1$ stycken

där s är spinnkvanttalet.

s är halvtaligt för fermioner och heltaligt för bosoner. Det vill säga $2s+1 = \begin{cases} \text{jämnt för fermioner} \\ \text{udda för bosoner} \end{cases}$

Fermioner ger alltså upphov till ett jämnt antal strålar, och bosoner till ett udda antal strålar.

(4.) a) Efter den första mätningen befinner sig molekylen i tillståndet $|1\rangle$, som är tillståndet där kväveatomen har ett bestämt läge "uppe".
Efter den andra mätningen har molekylens tillstånd kollapsat till energitillståndet
$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$,
och kväveatomens läge är inte längre bestämt.
När vi mäter läget igen hittar vi kvävet "uppe" med slh $= |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ och i "nere" med slh $= |-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$.

b) Efter den tredje mätningen befinner sig molekylen antingen i $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)$ eller i $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|II\rangle - |I\rangle)$.
Inget av dessa tillstånd har bestämd energi (linjärkombinationer av $|I\rangle$ med $E = E_I$ och $|II\rangle$ med energi $E = E_{II}$), och alltså är de inga stationära tillstånd.
Svaret är alltså nej.

(5.) a) Vi söker ett tillstånd $|4\rangle = a|5\rangle + b|6\rangle$ sådant att $|a|^2 = \frac{3}{4}$ och $|b|^2 = \frac{1}{4}$.

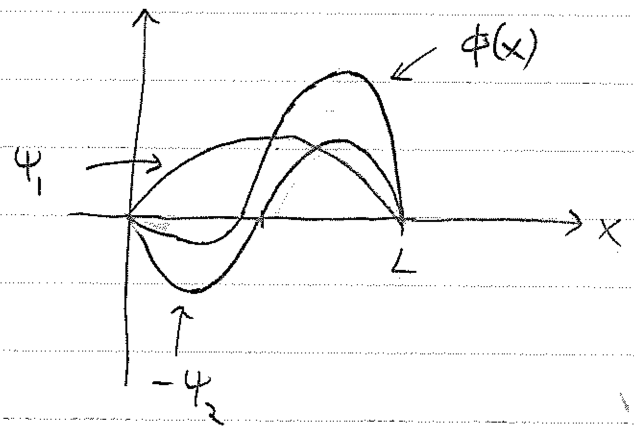
Ett exempel: $|4\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|5\rangle + \frac{1}{2}|6\rangle$

b) $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

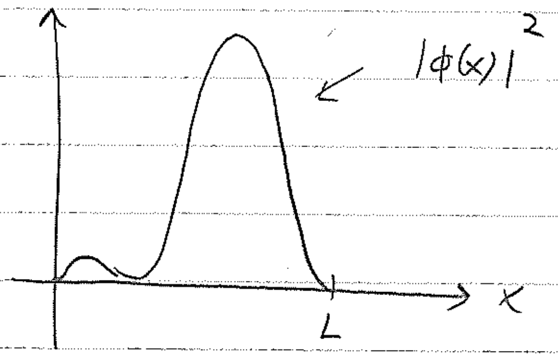
$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \langle x|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|1\rangle - \langle x|2\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) - \psi_2(x))$$

Vi skissar funktionerna:



$\Downarrow$



c) Sannolikheten att hitta partikeln inom $a < x < b$ ges av $\int_a^b |\phi(x)|^2 dx$. D.v.s. det är troligare att hitta partikeln där $|\phi(x)|^2$ är stort. Enligt skissen ovan är det troligast att hitta partikeln någonstans till höger i gropen.

d) För $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ är sannolikheten att vi mäter energi E_n : $P(E = E_n) = |c_n|^2$.

För vårt tillstånd $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$ är alltså

$$\begin{cases} P(E = E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}) = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2} \\ P(E = E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}) = |-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

och sannolikheten är noll att vi uppmäter någon annan energi.

e) $|1\rangle$ och $|2\rangle$ är stationära tillstånd och tidsutvecklas med exponentialfaktorerna $e^{-iE_1t/\hbar}$ respektive $e^{-iE_2t/\hbar}$, d.v.s.

$$\begin{cases} \psi_1(x,t) = e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1(x,0) \quad , \quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \\ \psi_2(x,t) = e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2(x,0) \quad , \quad E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x,t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(x) = \sum_n c_n(0)e^{-iE_nt/\hbar}\psi_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1(x) - e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2(x)\right)$$