Effekt av mätningar.

Två nivå system: $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$
(NH_3 till ex.)

Hamiltonianen: $H_{11} = H_{22} = E_0$
$H_{12} = H_{21} = -A$.

Lösning till S.E.:

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-i/\hbar (E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-i/\hbar (E_0 + A)t}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} e^{-i/\hbar (E_0 - A)t} - \frac{b}{2} e^{-i/\hbar (E_0 + A)t}.$$

a, b: beror på hur systemet ser ut vid en viss tidpunkt (till ex $t = 0$).

Två viktiga fall: stationära tillstånd
Stationära tillstånd: har form

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i/\hbar\, Et} \left(\overset{\swarrow \text{tidsoberoende!}}{c_1} |1\rangle + \cdots + c_N |N\rangle \right)$$

all tidsberoende finns i första faktorn.

* sannolikheter är tidsoberoende:

$$P(j,t) = |\langle j | \psi(t)\rangle|^2$$

$$= |e^{-i/\hbar\, Et}|^2 \, |c_j|^2 = |c_j|^2$$

* Energi av tillståndet: E

För fallet vi tittar på:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{-i/\hbar (E_0 + A)t} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right)}_{:= |I\rangle}$$

Energi: $E_0 + A$

$$|\psi(t)\rangle_{II} = e^{-i/\hbar (E_0 - A)t} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)}_{:= |II\rangle}$$

Energi: $E_0 - A$.

Energi kan ta två olika värden, den är kvantiserad.

Nu tittar vi på effekten av en mätning av N-atomens läge.

Vi startar med NH_3 molekylen i energi tillstånd I, och gör en mätning of N-atomens läge

$$|\psi(t)\rangle_I = \frac{e^{-i/\hbar (E_0+A)t}}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right) = |I\rangle$$

$$P_1 = |c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad P_2 = |c_2(t)|^2 = \frac{1}{2}$$

Nu antar att vi får läge '1', vid en mätning av läget vid $t=0$.
Om vi skulle mäta genast igen, får vi '1' igen med sannolikhet $P=1$, eftersom 'tillståndet har kollapsat' (jämför

tillståndet man mottaget (jämför Stern Gerlach apparaten).
(Det var 'mätnings postulatet' i kvantfysik).
Så, nu ser vågfunktionen efter mätningen ut som $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, d.v.s. $c_1(0) = 1$

$c_2(0) = 0$.

Hur ser vågfunktionen ut en längre tid efter mätningen?

Vi tittar på den allmänna lösningen vid $t=0$:

$c_1(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1$

$c_2(0) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 0$

Vi får att $a = b = 1$.

Så, lösningen av S.E. är nu:

$$c_1(t) = \frac{1}{2} e^{-i/\hbar (E_0 - A)t} + \frac{1}{2} e^{-i/\hbar (E_0 + A)t}$$

$$= e^{-i/\hbar E_0} \frac{1}{2} \left(e^{iAt/\hbar} + e^{-iAt/\hbar} \right)$$

$$= e^{\dots} \frac{1}{2}\left(e^{\dots} + e^{\dots}\right)$$

$$= e^{-iE_0 t/\hbar} \cos(At/\hbar) \qquad \left(\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)$$

På samma sätt: $\qquad \left(\sin x = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)$

$$c_2(t) = e^{-i/\hbar (E_0)t} \frac{i}{2i}\left(e^{iAt/\hbar} - e^{-iAt/\hbar}\right)$$

$$= i\, e^{-i/\hbar\, E_0 t} \sin(At/\hbar)$$

Om vi nu skulle mäta läget igen på en senare tid $t > 0$, då får vi:

$$P_1(t) = |c_1(t)|^2 = \left[\cos(At/\hbar)\right]^2$$

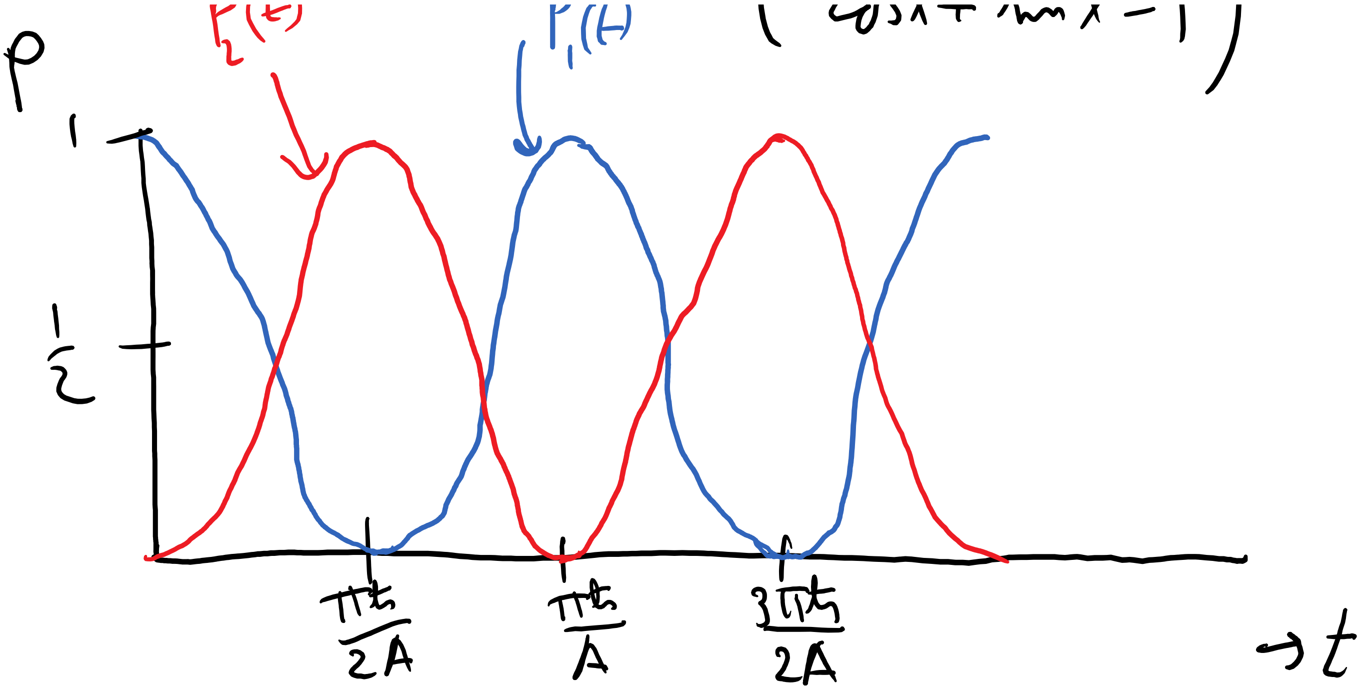
$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \left[\sin(At/\hbar)\right]^2$$

Nu är sannolikheterna också tidsberoende!

Men: $P_1(t) + P_2(t) = 1$ som det ska!

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right)$$

($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)



Så efter ett tag ($t = \frac{\pi\hbar}{2A}$) är N-atomen vid läge '2', även om det var vid läge '1' vid $t=0$, så den har bytt plats.
Det kan händer via 'tunneling'!

Nu vet vi hur tillståndet ser ut efter en mätning av läget vid $t=0$, som hadde resultat '1'. Om vi mäter läget genast igen, får vi '1' med sannolikhet $P = 1$.

Men, om vi genast gör en mätning av energin istället, vad är då sannolikhet att istället, vad är då sannolikhet att få $E_I = E_0 + A$ eller $E_{II} = E_0 - A$?

Vid $t=0$ har vi: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$.

Vi vet att $|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$ har energi E_I,
$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ har energi E_{II}.

Vi kan skriva: $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|I\rangle + |II\rangle \right)$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|I\rangle + |II\rangle \right)$$

$|1\rangle, |2\rangle$: bastillstånd (med bestämd läge).

$|I\rangle, |II\rangle$: annan bas (E bestämd).

På $t=0$ har vi: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle$

Så, om vi mäter energin får vi (vid $t=0$):

$$P(E = E_I) = |\langle I | \psi(0)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(E = E_{II}) = |\langle II | \psi(0)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$