Egenskaper av bastillstånd.

$|i\rangle$: komplett bas: för $s=1$ partiklar $|+\rangle$; $|0\rangle$; $|-\rangle$ (i en viss riktning)

Varje tillstånd kan skrivas i termer av bastillstånd: (här i $\hat{z}$-riktning)

$$|\chi\rangle = a_+ |+\rangle_z + a_0 |0\rangle_z + a_- |-\rangle_z ,$$

med a_+, a_0, a_- komplexa tal.

$|\chi\rangle$: är en <u>superposition</u> av $|+\rangle_z$; $|0\rangle_z$; $|-\rangle_z$.

Mätning av S_z:
$$P(S_z = +\hbar) = |a_+|^2$$
$$P(S_z = 0\hbar) = |a_0|^2$$
$$P(S_z = -\hbar) = |a_-|^2$$

Så, $|\chi\rangle$ ska vara normerat: $\langle\chi|\chi\rangle = |a_+|^2 + |a_0|^2 + |a_-|^2 = 1$.

Egenskaper av bastillstånd:

$*$ $\langle j | i \rangle = \delta_{i,j}$

$*$ $\sum_{\text{alla } i} |i\rangle\langle i| = \mathbb{1}$: enhetsoperator

$$|\chi\rangle = \mathbb{1}|\chi\rangle = \sum_i |i\rangle \underbrace{\langle i|\chi\rangle}_{=a_i}$$

$$= \sum_i a_i |i\rangle$$

$*$ $\langle \chi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle^*$

$$\langle \chi | \mathbb{1} = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | = \sum_i \langle i | \chi \rangle^* \langle i |$$

$$= \sum_i \langle i | a_i^*$$

Relation med linjär algebra:

$$|\chi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \langle \chi | \leftrightarrow (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

$$|\varphi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$, då har vi:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_i \underbrace{\langle \varphi | i \rangle}_{b_i^*} \underbrace{\langle i | \chi \rangle}_{a_i} = \sum_i b_i^* a_i$$

$$\leftrightarrow (b_1^*, b_2^*, b_3^*) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow (b_1^*, b_2^*, b_3^*) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$b_i \qquad a_i$

Vi kan använda vilken bas som helst.

Ta $S=\frac{1}{2}$ partiklar.

S_z-värden: $+\hbar/2$, $-\hbar/2$.

Bastillstånd: $|+\hbar/2\rangle_z = |\uparrow\rangle$ (S_z-bas)

$|-\hbar/2\rangle_z = |\downarrow\rangle$

Vi kan också använda S_x-bas:

$|+\hbar/2\rangle_x = |\rightarrow\rangle$

$|-\hbar/2\rangle_x = |\leftarrow\rangle$

De två baser är relaterade. Utan förklaring:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right)$$

Om vi har en partikel i tillstånd $|\chi\rangle = |\rightarrow\rangle$, och vi mäter S_z: får $S_z = +\hbar/2$ med $P=\frac{1}{2}$

$S_z = -\hbar/2$ med $P=\frac{1}{2}$.

Så, S_x är bestämd, men vi vet inget

Så, S_x är bestämd, men vi vet inget om S_z!

Vi kan också skriva:

$$|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle + 0\,|\downarrow\rangle,$$ eller

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle\right).$$ P.S.S:

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle\right).$$

Så om vi har en partikel med $S_z = -\hbar/2$, och gör en mätning av S_x, då får vi $S_x = +\hbar/2$ med $P = \frac{1}{2}$, och $S_x = -\hbar/2$ med $P = \frac{1}{2}$.

Viktig postulat i kvantmekanik:

Om vi gör en mätning av (säg) S_z, och får $S_z = +\hbar/2$, och vi gör genast en mätning igen, då får vi igen $S_z = +\hbar/2$ med sannolikhet $P = 1$.

Vi säger att vågfunktionen har kollapsat.

<u>Ex</u>: Vi har en $s = \frac{1}{2}$ partikel i tillstånd

$|x\rangle = |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$ så $S_x = -\hbar/2$.

Vi gör en mätning av S_z, och får $S_z = +\hbar/2$ (händer i hälften av fallen). Efter mätningen har partikel tillstånd:

$$|\chi\rangle = |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle\right)$$

Om vi mäter S_z igen får vi $S_z = +\hbar/2$ med $P = 1$.

Vad händer om vi skulle mäta S_x efter 1^a mätning av S_z?

$|\chi\rangle = |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle\right)$, så nu får vi $S_x = +\hbar/2$ med $P = 1/2$

$S_x = -\hbar/2$ med $P = 1/2$!

Vi har inte pratat om S_y basen. Utan förklaring ger vi att:

$$|+\hbar/2\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right)$$

$$|+\hbar/2\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right)$$

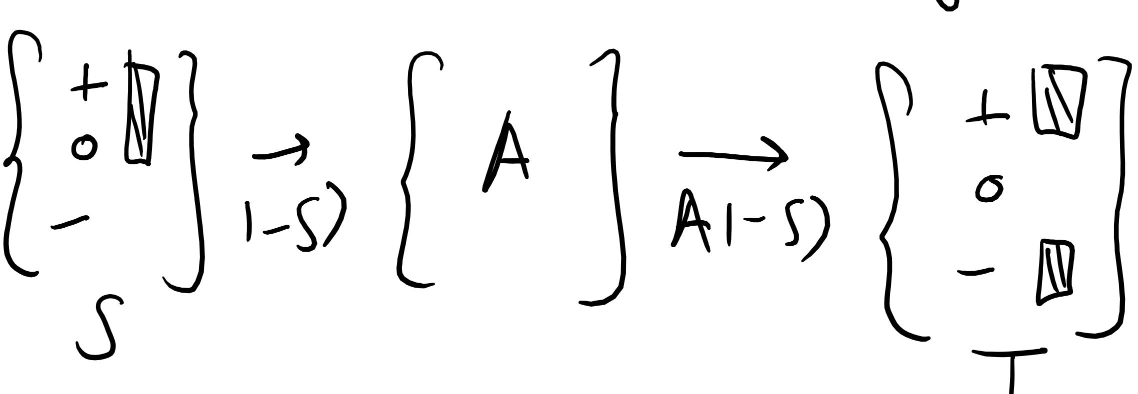
$$|-\hbar/2\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle\right)$$

(OBS: vi får multiplicera ett tillstånd med en 'övergripande' fas, utan att vi ändrar egenskaperna av partikeln!).

Beskrivning av SG apparater:
de 'tar ett tillstånd, och ger ett nytt':

$$|\chi\rangle \to \underset{}{\overset{SGA}{\boxed{}}} \to A|\chi\rangle = |\varphi\rangle$$

A är en <u>operator</u>.
För att beskriva A, använder vi SGA:er



Innan A: bara partiklar i tillstånd $|-\rangle_S$

Innan A: bara partiklar i tillstånd $|-\rangle_S$.
Efter A: partiklar i tillstånd $A|-_S\rangle$.
Vad är amplituden för att komma genom 3e SG$\hat{A}$?

$$\langle 0T|A|-_S\rangle$$: är ett komplext tal!

I allmänhet behöver vi veta
$\langle \varphi|A|\chi\rangle$ för godtyckliga $|\varphi\rangle$ och $|\chi\rangle$.

amplitud för att en partikel i $|\chi\rangle$ innan SGA hamnar i $|\varphi\rangle$ efter apparaten.

Hur beskriver vi A?
Tittar på $\langle \varphi|A|\chi\rangle$

$$\langle \varphi|A|\chi\rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\chi\rangle$$

(oberoende summor!)

beskriver $|\varphi\rangle$ $\quad A \quad |\chi\rangle$

A beskrivs av $\langle i|A|j\rangle = A_{i,j}$

Vi ser $A_{i,j}$ som element av en matris:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Hur beskriver vi A 'ensam'?

$$A = \mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_{i,j} |i\rangle \underbrace{\langle i|A|j\rangle}_{A_{ij}} \langle j|$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} \, |i\rangle\langle j|$$

$$|\varphi\rangle = A|\chi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{13} \\ & & \\ A_{31} & \cdots & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} a_1 + A_{12} a_2 + A_{13} a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Om vi har fler apparater i rad:

$$|x\rangle \rightarrow \boxed{A} \xrightarrow{A|x\rangle} \boxed{B} \rightarrow B(A|x\rangle)$$

BA: produkt av 2 matriser.

OBS: för matriser har vi $BA \neq AB$ i allmänhet!