Bas tillstånd och operatorer.

Vi skriver amplituden för händelsen i Dirac notation:

$$\phi = \langle slut | start \rangle = \langle \psi | \chi \rangle$$

$|\chi\rangle$: är som en vektor, innehåller all information om systemet innan händelsen: $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$

$|\psi\rangle$: är vektorn som beskriver systemet efter händelsen : $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}$

$\langle\psi|$: är 'hermitisk konjugerat',

$$\langle \psi | = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$$

Amplituden för händelsen blir:

$$\langle \psi | \chi \rangle = b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + b_3^* a_3$$

Vi måste uttrycka $|\chi\rangle$ i en <u>bas</u>, till ex, för en spinn-1 partikel kan vi ta $\hat{z}$-bas:

$$|+\hbar\,\hat{z}\rangle\ ;\ |0\hbar\,\hat{z}\rangle\ ;\ |-\hbar\,\hat{z}\rangle.$$

Tillståndet $|+\hbar\,\hat{z}\rangle$: om vi mäter S_z, får vi alltid $S_z = +\hbar$, för $|0\hbar\,\hat{z}\rangle$: $S_z = 0\hbar$, och $|-\hbar\,\hat{z}\rangle$: $S_z = -\hbar$.

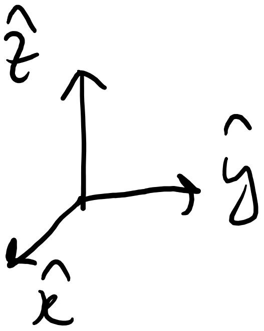
Vi kan använda vilken bas som helst, i 'S-riktning': $|+S\rangle$; $|0S\rangle$; $|-S\rangle$, eller T-riktning: $|+T\rangle$; $|0T\rangle$; $|-T\rangle$.

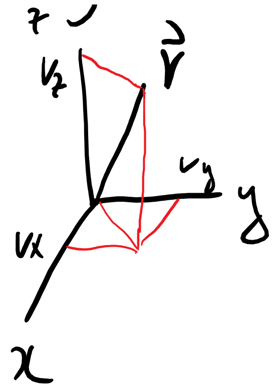
För ett godtycklig tillstånd:

$$
\begin{aligned}
|\chi\rangle &= a\,|+S\rangle + b\,|0S\rangle + c\,|-S\rangle \\
&= a'\,|+T\rangle + b'\,|0T\rangle + c'\,|-T\rangle,
\end{aligned}
$$

med a, b, c, a', b', c': komplexa tal.

Samma gäller för vanliga vektorer:





$$\vec v = v_x \hat x + v_y \hat y + v_z \hat z = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Egenskaper: $\hat x \cdot \hat x = \hat y \cdot \hat y = \hat z \cdot \hat z = 1$

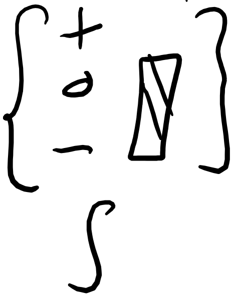
$\hat x \cdot \hat y = \hat x \cdot \hat z = \hat y \cdot \hat z = 0$

Hur får vi v_x från $\vec v$? $\hat x \cdot \vec v = v_x$!

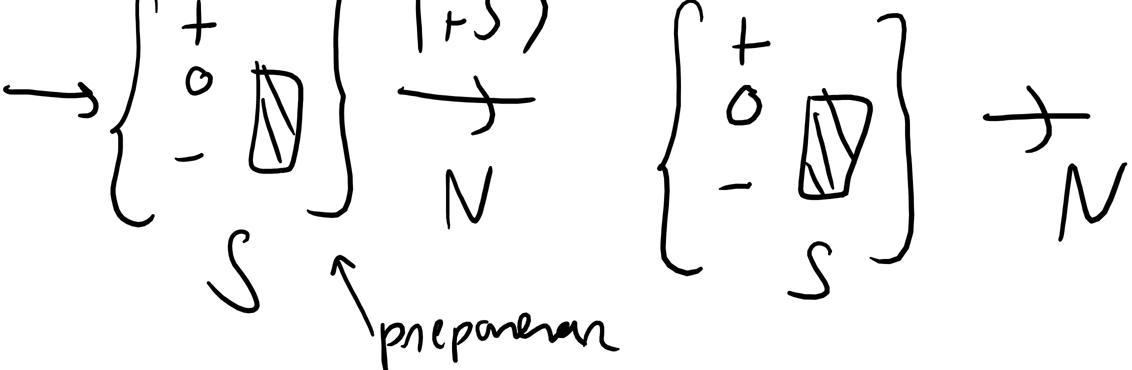
Egenskaper av bastillstånd:

Vi skickar partiklar i tillstånd $|+S)$

genom



:



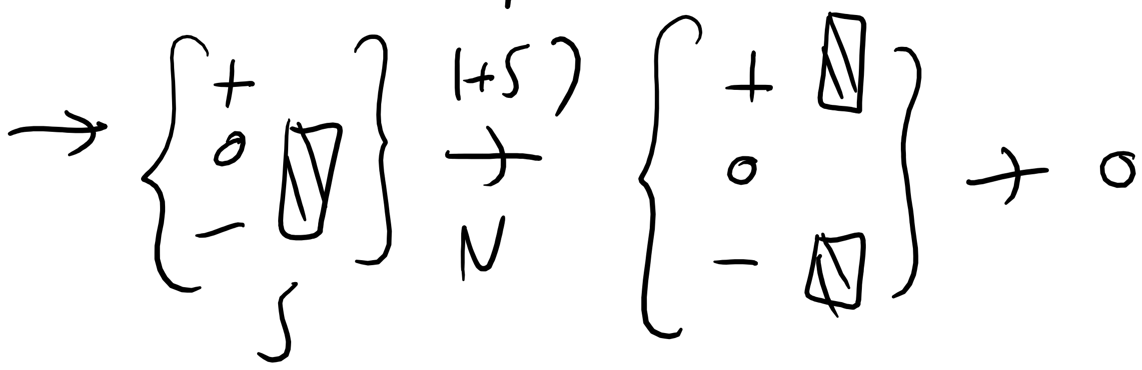
preparerar

partiklar i tillstånd $|+S\rangle$

Alla partiklar som kommer genom 1ª SGA kommer genom 2ª; det betyder:

$$\langle +S|+S\rangle = 1$$

Nu tittar vi på:



Inga partiklar kommer genom: $\langle 0S|+S\rangle = 0$

I allmänhet har vi, för en 'komplett' bas:

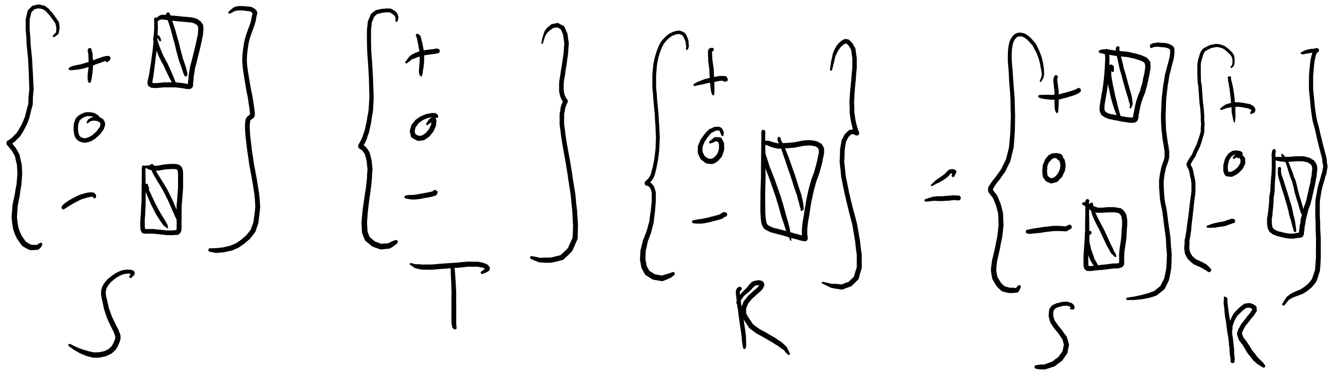
$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j} \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i\neq j \end{cases}$$

Kronecker-δ.

(här: $|i\rangle = |+S\rangle, |0S\rangle, |-S\rangle$)

En helt öppen SGA:

En helt öppen SGA:



Amplitud för att en partikel som kommer genom 1ª kommer genom 3e:

$$\langle +R|+T\rangle\langle +T|0S\rangle + \langle +R|0T\rangle\langle 0T|0S\rangle + \langle +R|-T\rangle\langle -T|0S\rangle = \langle +R|0S\rangle$$

Vänster led: $\sum\limits_{\substack{\text{alla } i \\ (i=+,0,-)}} \langle +R|i\rangle\langle i|0S\rangle = \langle +R|0S\rangle$

I allmänhet: $\langle \chi|\varphi\rangle = \sum\limits_i \langle \chi|i\rangle\langle i|\varphi\rangle$

Så $\sum_i |i\rangle\langle i|$ fungerar som en 'identitet'

'identitet'.

$$\langle \chi | \varphi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \varphi \rangle = \langle \chi | \Big(\sum_i | i \rangle \langle i | \Big) | \varphi \rangle$$

Detta gäller <u>för alla</u> $|\chi\rangle$ och $|\varphi\rangle$, så vi måste ha att:

$$\sum_{\text{alla } i} | i \rangle \langle i | = \mathbb{1} \quad : \text{enhets operator.}$$

Med vektorer och matriser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Vi får alltid 'sätta in' en 'etta' någonstans:

$$|\chi\rangle = \sum_i | i \rangle \underbrace{\langle i | \chi \rangle}_{\text{komplext tal, säg } a_i}$$

$$= \sum_i | i \rangle \, a_i = \sum_i a_i \, | i \rangle$$

Nu har vi skrivit $|x\rangle$ i en bas!
För att specificera $|x\rangle$ behöver vi veta
$a_i = \langle i|x\rangle$

I allmänhet har vi: $\langle x|\varphi\rangle = (\langle\varphi|x\rangle)^*$
Komplexa vektorer:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = b_x^* a_x + b_y^* a_y + b_z^* a_z = (\vec{a}\cdot\vec{b})^*$$

Så: $\langle x| = \sum_i \langle x|i\rangle\langle i|$

$$= \sum_i \langle i|x\rangle^* \langle i|$$

$$= \sum_i a_i^* \langle i| = \sum_i \langle i| a_i^*$$

<u>Viktig!</u> Vad är betydelsen av $\langle i|x\rangle$?

$\langle i|\chi\rangle$ är amplituden för händelsen att vi startar i tillståndet $|\chi\rangle$ och hamnar i $\langle i|$.

$\langle i|\chi\rangle$ är amplituden för att få mätvärdet som motsvarar 'i' om vi gör en mätning på $|\chi\rangle$.

Ex: vi tar en spinn-1 partikel, och använder $\hat{z}$ bas: $|+\rangle_z$; $|0\rangle_z$; $|-\rangle_z$

Vi tar: $|\chi\rangle = \frac{1}{3}|+\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}|0\rangle + 0|-\rangle$, och gör en mätning av S_z:

$$P(S_z = +\hbar) = |\langle +|\chi\rangle|^2$$

$$= \left|\frac{1}{3}\langle +|+\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}\underbrace{\langle +|0\rangle}_{=0} + 0\underbrace{\langle +|-\rangle}_{=0}\right|^2$$

$$= 1/9$$

$$P(S_z = 0) = |\langle 0|\chi\rangle|^2 = \left|-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right|^2 = 8/9$$

$$P(S_t = 0\hbar) = |\langle 0|\chi\rangle|^2 = |-2\sqrt{2}/3|^2 = 8/9$$

$$P(S_t = -\hbar) = |\langle -1|\chi\rangle|^2 = 0.$$

OBS: tillsammans har vi

$$P(S_t = +\hbar) + P(S_t = 0\hbar) + P(S_t = -\hbar) = 1.$$

Vi säger att $|\chi\rangle$ är 'normerad'

$\langle \chi|\chi\rangle = 1$ (vi kan alltid multiplicera med en faktor för att få det!).

Vi har tittad på hur vi beskriver ett tillstånd $|\chi\rangle$.

Hur beskriver vi en Stern-Gerlach apparat?

Vi måste veta vad den gör med en godtycklig tillstånd!

Så, vi har en SGA, som vi kallar: A_{pp}, och en godtycklig tillstånd $|\chi\rangle$.

och en godtycklig tillstånd $|\chi\rangle$.
partikel
med

Vi antar att tillståndet efter apparaten blir $|\varphi\rangle$:

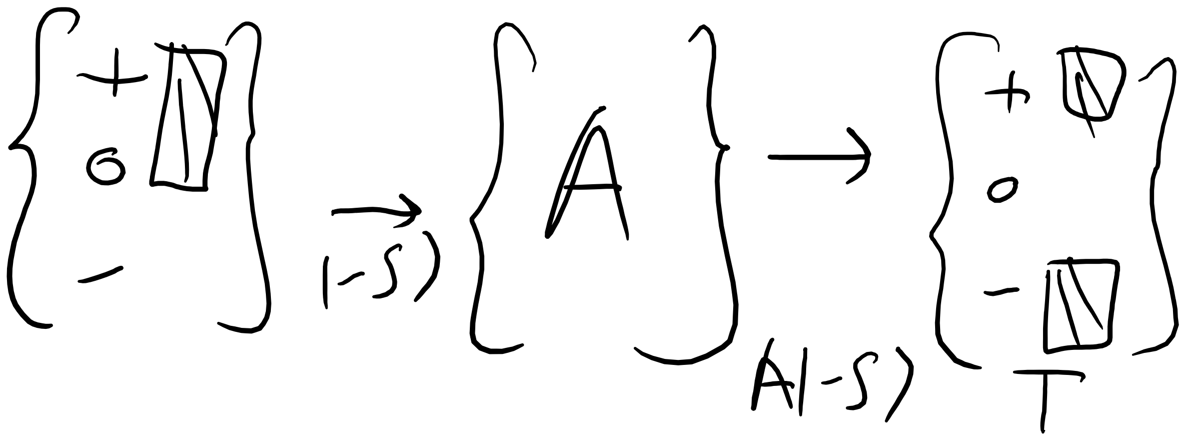
$$|\chi\rangle \rightsquigarrow A_{pp} \rightsquigarrow |\varphi\rangle$$

Vi säger att A_{pp} 'verkar på' $|\chi\rangle$, och vi får $|\varphi\rangle$. Vi ser 'A_{pp}' som en 'operator', och vi skriver:

$$\underbrace{A|\chi\rangle}_{\text{operator A som verkar på } |\chi\rangle} = |\varphi\rangle$$

Det är abstrakt notation, men mycket smidigt! (I termer av vektorer osv: A är som en matris!).

För att beskriva A använder vi SGA^en:



Innan A: bara partiklar i tillstånd $|-S\rangle$, p.g.a. 1^a SGA.
Efter A: partiklar med tillstånd $A|-S\rangle$.

Vad är amplituden för att komma genom 3^e SGA?

$$\langle 0T|A|-S\rangle$$: ett komplext tal!

I allmänhet behöver vi veta $\langle\varphi|A|\chi\rangle$, för godtyckliga $|\chi\rangle$ och $|\varphi\rangle$.

$\langle\varphi|A|\chi\rangle$ är amplituden för en partikel med tillstånd $|\chi\rangle$ hamnar i tillstånd $|\varphi\rangle$ efter apparaten.

$|\varphi\rangle$ efter apparaten.

För att få fram det, måste vi beskriva apparaten i en bas.
Så: vi använder tricket med $\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\langle i|$

igen!

$$\langle\varphi|\mathbb{1}\, A\, \mathbb{1}|\chi\rangle = \sum_{i,j} \langle\varphi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\chi\rangle$$

(två summor som är <u>oberoende</u>!)

$\langle\varphi|i\rangle = \langle i|\varphi\rangle^*$: känd om vi vet $|\varphi\rangle$
$\langle j|\chi\rangle$ " " " " $|\chi\rangle$.

$\langle i|A|j\rangle$: komplexa tal, som beskriver A fullständigt.

För spinn-1 partiklar: $3 \times 3 = 9$ komponenter.