Identiska partiklar & Spridning.

Experiment: två partiklar skjuts till varandra. Vi analysera vad som händer, och använder 'masscentrum':

Masscentrum: punkten så att

$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$, eller $m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$.

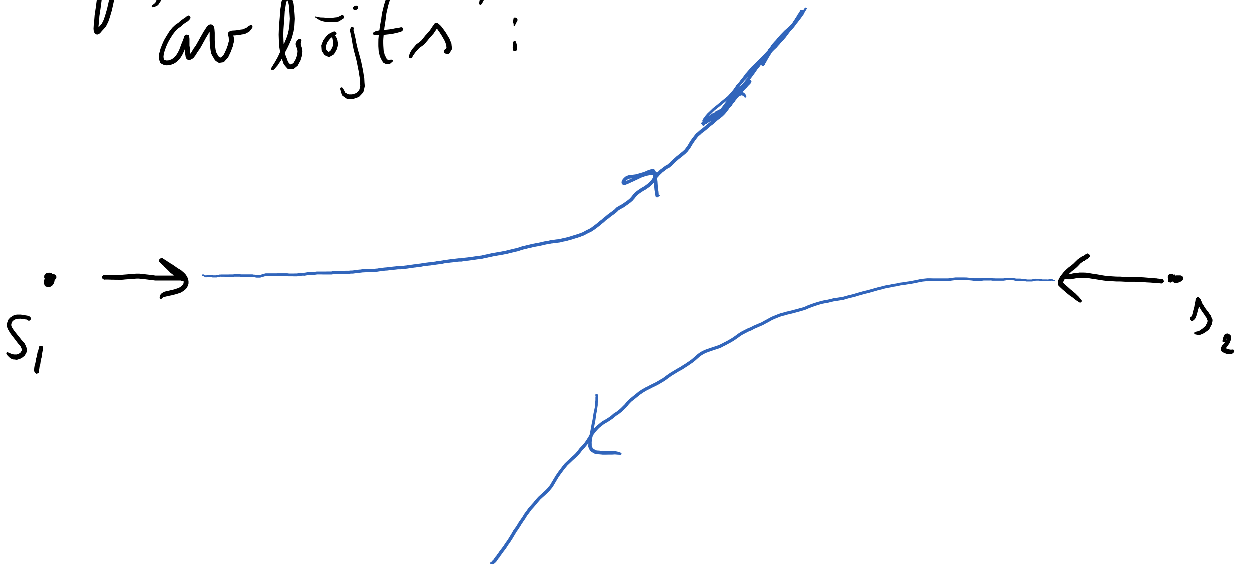
Det ger oss: $m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} = -m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}$, eller $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

Så, före kollisionen har partiklarna motsat rörelsemängd.

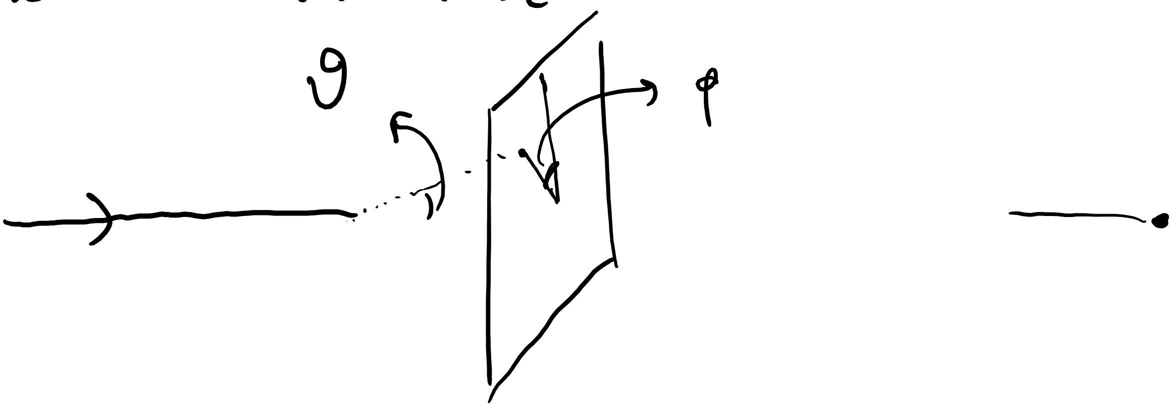
$\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ är bevarat, så efter kollisionen har vi också att $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$.

Efter kollisionen har partiklarna

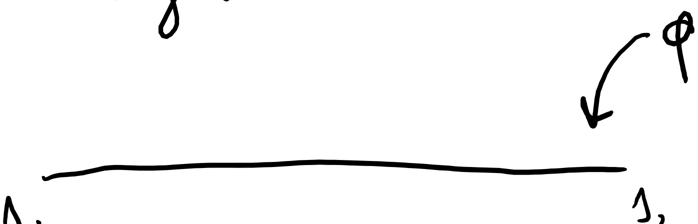
Efter kollisionen har partiklarna 'avböjts':



Hur de har avböjts kan vi beskriva med två vinklar:



Nu använder vi en viktig princip.
Systemet har symmetri: det ändras inte om vi 'roterar' systemet om 'den långa axeln':



Så, resultatet av experimentet beror inte på vinkel φ!

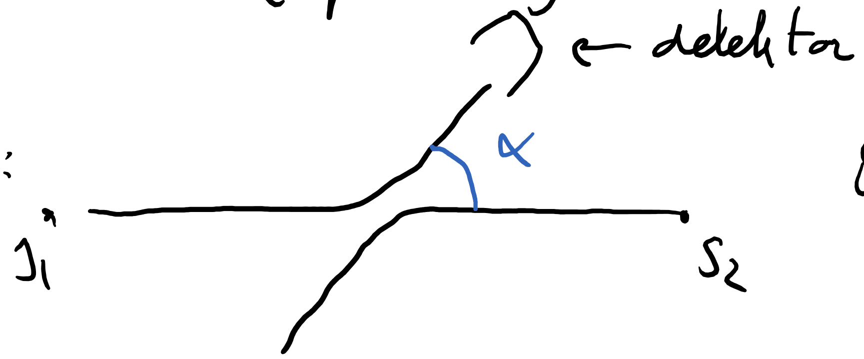
inte på vinkel φ!

Kvantmekanik: ger oss amplituden.
I det här fallet: amplitud f för en viss avböjning:
$f(\vartheta, \varphi)$ = amplitud för en avböjning med vinklar ϑ och φ. Men det beror inte av φ, så vi kan skriva:

$$f(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta)$$

Vi tittar på 3 fall:

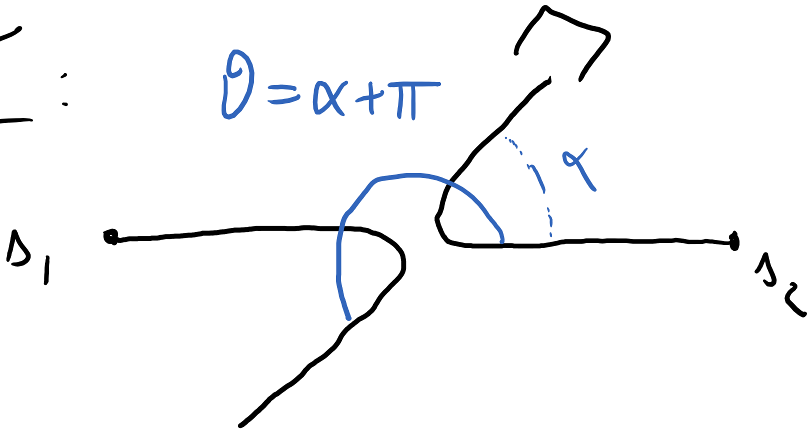
I:



$\vartheta = \alpha$

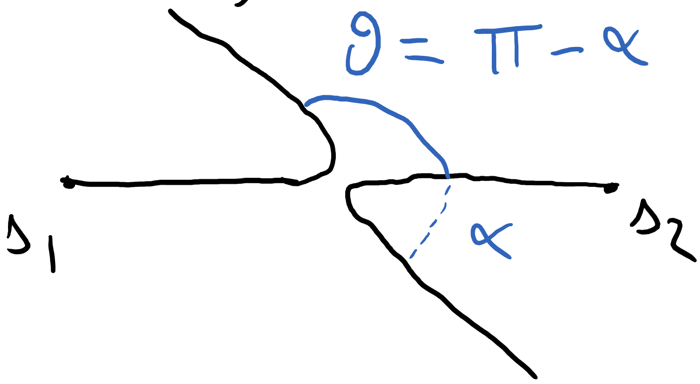
ϑ är spridningsvinkel: hur mycket är partikel 1 avböjt efter kollisionen.
Amplitud: $f(\alpha)$

III:



Vad blir spridningsvinkeln ϑ i termer av α: $\vartheta = \alpha + \pi$. Amplitud: $f(\alpha + \pi)$.

III: vi roterar fall III i φ riktning: (över π):



Spridningsvinkel: $\vartheta = \pi - \alpha$, så amplituden är $f(\pi - \alpha)$.
Men, II och III är 'symmetri-relaterad', så de har samma amplitud:
Så:
$f(\alpha + \pi) = f(\underline{\pi - \alpha})$ (används

$$\underline{f(\alpha + \text{II}) = f(\pi - \alpha)}$$ (används senare!)

För att förklara spridning ritade jag banor. Det kan man göra för klassiska partiklar, och då vet man vilken av partiklarna (från s_1 eller s_2) hamnade i detektorn.

Kvantmekaniska partiklar har inga välbestämda banor, och då vet vi inte om det var partikeln från s_1 eller s_2 som hamnade i detektorn! (om partiklar är identiska).

Vi tittar på fall I och II.
Vad är sannolikhet att detektorn detekterar en partikel?

* Olika partiklar: vi kan skilja I och II:
addera sannolikheterna:

$$P = |f(\theta)|^2 + |f(\theta+\pi)|^2$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\theta-\pi)|^2 \quad \text{(symmetri)}$$

Exempel: klassiska partiklar;
proton & He kärna (α-partikel)
proton & elektron, osv.

* Identiska partiklar: vi måste 'lägga ihop' amplituderna först!
Ex: 2 α-partiklar, 2 elektroner
(med samma spinn, nästa föreläsning).
osv.

Hur lägger man ihop amplituderna?
Experiment har visats att det finns två slags partiklar:
bosoner: amplituder adderas
fermioner: amplituder subtraheras

Om vi har två processer, som skiljer sig så att två identiska partiklar har bytt plats i slutet (partikel från s_1 detekteras i D, eller den från s_2), då måste amplituderna adderas eller subtraheras:

$$P = |f(\vartheta) \overset{\text{boson}}{\underset{\text{fermion}}{\pm}} f(\vartheta+\pi)|^2$$

$$= |f(-\vartheta) \pm f(\vartheta-\pi)|^2 \quad \text{(p.g.a symmetri).}$$

Exempel på fermioner: proton, elektron, neutron, partiklar som består av udda antal fermioner.
Fermioner har 'halvtalig' spinn.
p^+, e^-, n: $s = \frac{1}{2}$ ($\uparrow$ eller $\downarrow$).

Exempel på bosoner: foton, partiklar med jämn antal fermioner (α-kärna, H atom, ...).
Bosoner har hel-talig spinn.

För identiska bosoner: $P = |f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta)|^2$
" " fermioner: $P = |f(\vartheta) - f(\pi - \vartheta)|^2$.

För olika partiklar: $P = |f(\vartheta)|^2 + |f(\pi - \vartheta)|^2$
OBS: aldrig $P \cancel{=} |f(\vartheta)|^2 - |f(\pi - \vartheta)|^2$

Nu tittar vi vid $\vartheta = \pi/2$:

$$P_{o.p.} = |f(\pi/2)|^2 + |f(\pi/2)|^2$$
(olika partiklar)
$$= 2\,|f(\pi/2)|^2$$

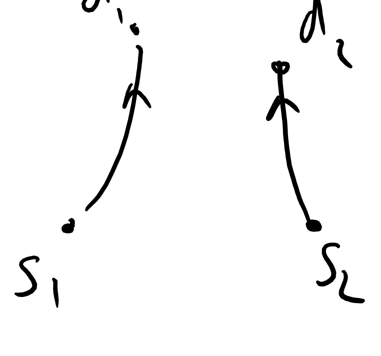
$$P_{i.b.} = |f(\pi/2) + f(\pi/2)|^2 = 4\,|f(\pi/2)|^2$$
(identiska bosoner)

$$P_{i.f.} = |f(\tfrac{\pi}{2}) - f(\tfrac{\pi}{2})|^2 = 0 \; !$$
(fermioner)

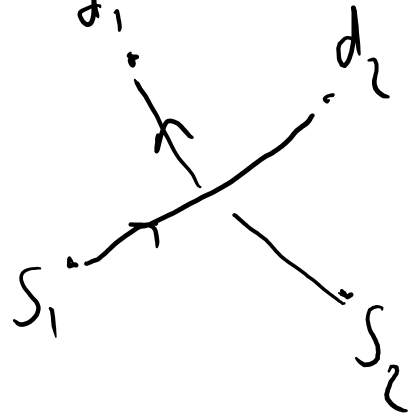
För identiska bosoner/fermioner har vi 'interferens'.

Pauli's uteslutnings princip.

Tar två partiklar, de skickas från S_1 och S_2 till d_1 och d_2 (detektorer): kan ske på två olika sätt:



eller



Vad är sannolikhet att vi har en

träff i detektorerna d_1 och d_2?

Skiljbara partiklar:

$$P_{sp} = |\underbrace{\langle d_1|s_1\rangle}_{a_{1\to1}}\underbrace{\langle d_2|s_2\rangle}_{a_{2\to2}}|^2 + |\underbrace{\langle d_2|s_1\rangle}_{a_{1\to2}}\underbrace{\langle d_1|s_2\rangle}_{a_{2\to1}}|^2$$

$$= |a_{1\to1}|^2|a_{2\to2}|^2 + |a_{1\to2}|^2|a_{2\to1}|^2$$

Identiska <u>bosoner</u>:

$$P_{i.b.} = |\langle d_1|s_1\rangle\langle d_2|s_2\rangle + \langle d_2|s_1\rangle\langle d_1|s_2\rangle|^2$$

$$= |a_{1\to1}\cdot a_{2\to2} + a_{1\to2}\cdot a_{2\to1}|^2$$

För identiska fermioner:

$$P_{i.f.} = |\langle d_1|s_1\rangle\langle d_2|s_2\rangle - \langle d_2|s_1\rangle\langle d_1|s_2\rangle|^2$$

$$= |a_{1\to1}\cdot a_{2\to2} - a_{1\to2}\, a_{2\to1}|^2.$$

Nu antar vi att vi har bara <u>en</u> detektor, eller att d_1 och d_2 är samma tillstånd:

då har vi att $a_{1\to1} = a_{1\to2} = a_1$

$$a_{2\to1} = a_{2\to2} = a_2$$

Då blir sannolikheterna:

$$P_{s.p} = 2|a_1|^2|a_2|^2$$

$$P_{i.b.} = 4|a_1|^2|a_2|^2 = 2P_{s.p.}$$

$$P_{i.f.} = 0$$

Så, identiska bosoner 'har en större chans' att vara 'i samma tillstånd'
Identiska fermioner <u>kan inte</u> vara i samma tillstånd

Detta är 'Pauli's uteslutnings princip'.

Viktig princip, till. ex. för att förklara det periodiska systemet: Olika slags atomer har olika antal elektroner. Varje rumsligt tillstånd kan bara ha två elektroner (med motsatt spinn).