Amplituder och sannolikheter.

Kvantmekanik: ger amplituder för 'händelser':

1) För varje händelse har vi en (sannolikhets) amplitud, som är ett komplext tal: $\phi = a+ib = r e^{i\varphi}$

r: 'längd' φ: fas.

Sannolikheten att händelsen inträffar är:
$P = |\phi|^2$

2) Om en händelse kan inträffa på två sätt, som inte kan skiljas åt: amplituderna adderas:
$\phi = \phi_1 + \phi_2$, och

$P = |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2$: vi har interferens!

3) Om vi kan skilja åt händelserna:
$P = P_1 + P_2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$; sannolikheter adderas; ingen interferens.

Kvantmekanik ger oss sannolikheter, inte vad som kommer hända med sannolikhet $P=1$.
Detta är ingen brist i teorin, det är så naturen fungerar. Experiment har visat att naturen är 'icke-deterministisk' !

Vi använder abstract notation: 'Dirac notation' för amplituder.

Amplitud för en händelse:

$\phi = \langle \text{sluttillstånd} \,|\, \text{starttillstånd} \rangle$

$P = |\phi|^2 = |\langle \text{slut till.} | \text{start till.} \rangle|^2$.

Vad är betydelsen av $\langle \; | \; \rangle$? Det är ett komplext tal; $| \; \rangle$ är som en <u>vektor</u>, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, och $\langle \; |$ är komplex transponat av en vektor,

$$(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{pmatrix}^T .$$

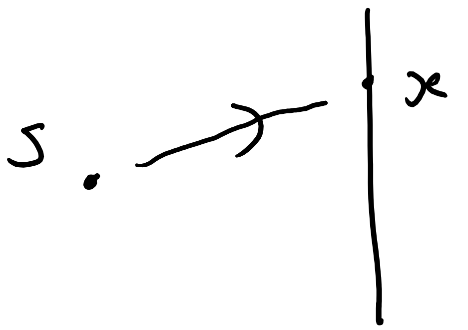
$\langle \; | \; \rangle$ är en skalär produkt:

$$(\vec{b}, \vec{a}) = (b_1^*, b_2^*, b_3^*) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + a_3 b_3^*$$

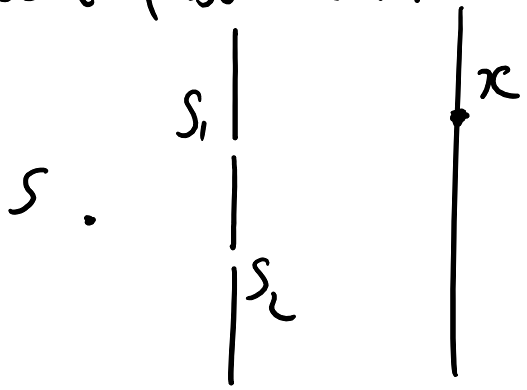
Exempel: sändare (source) skickar ① en partikel till en skärm, nämligen till position x:

$|_x$ amplitud för



amplitud för händelsen att en partikel skickas från S till x: $\langle x|S\rangle$.

② Nu kan det inträffa på två olika sätt (som vi inte kan skilja åt)



$$\langle x|S\rangle = \langle x|S\rangle_{\text{via } S_1} + \langle x|S\rangle_{\text{via } S_2}$$

Sannolikhet blir: $P = \left|\langle x|S\rangle_{\text{via } S_1} + \langle x|S\rangle_{\text{via } S_2}\right|^2$

③ Vi delar upp $\langle x|S\rangle_{\text{via } S_1}$ i två steg, som både måste inträffa:

Från S till S_1: $\langle 1|S\rangle$

Från S_1 till x: $\langle x|1\rangle$

Eftersom både måste inträffa, måste vi multiplicera amplituderna:

vi multiplicera amplituderna.

$$\langle x|S\rangle_{\text{via } S_1} = \langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle$$

$$\langle x|S\rangle_{\text{via } S_2} = \langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle .$$

Så, vi kan skriva:

$$\langle x|S\rangle = \langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle .$$

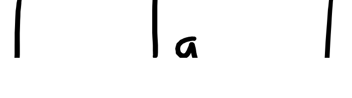
Eftersom $\langle \ | \ \rangle$ är ett (komplext) tal, kan vi byta ordning:

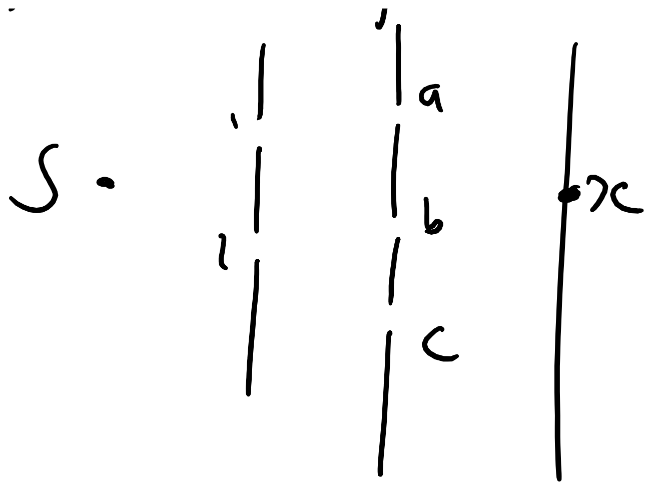
$\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle = \langle 1|S\rangle\langle x|1\rangle$, men vi brukar ordna 'från höger till vänster'.

4 Om vi har två partiklar som agerar oberoende av varandra: partikel 1 från s_1 till a, och part 2. från s_2 till b:

$\phi = \langle a|s_1\rangle\langle b|s_2\rangle$ (både måste inträffa)

Mer komplicerat fall:


a

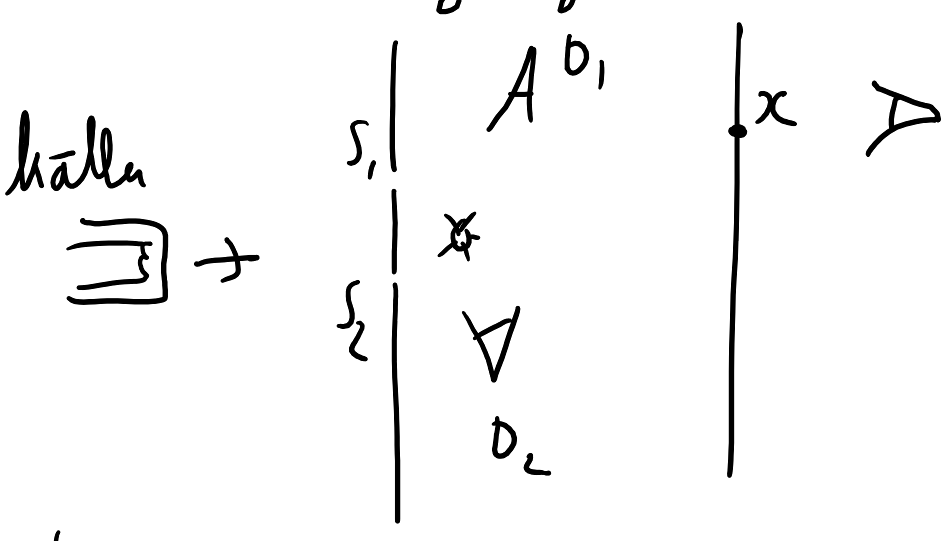


Vad blir $\langle x|S\rangle$?

$$
\begin{aligned}
\langle x|S\rangle = \; & \langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle \; + \\
& \langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|S\rangle \; + \\
& \vdots \\
& \langle x|c\rangle\langle c|2\rangle\langle 2|S\rangle \quad \text{(6 termer)}
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{\substack{i=1,2 \\ \alpha=a,b,c}} \langle x|\alpha\rangle\langle \alpha|i\rangle\langle i|S\rangle
$$

För sista gången: dubbelspalt exp.



Utan lampa: $\langle x|s\rangle = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle +$
$\langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle$
$= \phi_1 + \phi_2$.

Med lampan:
amplitud att en e^- vid S_1 ger en foton i D_1: a
" " " e^- " S_2 " " " i D_2: a
(symmetriskt!).
" " " e^- " S_1 " " " i D_2: b
" " " e^- " S_2 D_1: b

För ljus med kort våglängd: $b \approx 0$
" " " långt " " $b \approx a$
(i jämförelse med avståndet mellan spalterna).

Vad blir amplituderna?
Amplitud för en e^- från s till x, via S. och en foton i D.:

S, och en foton i D_1:

$$\langle x|1\rangle a \langle 1|S\rangle$$

Nu: e^- från S till x, via S_2, och en foton i $\underline{D_1}$: $\langle x|2\rangle b \langle 2|S\rangle$

Det är två sätt för en e^- från S till x, med foton i D_1, så:

$$\left\langle \begin{matrix} e^- \text{ i } x, \\ \text{foton i } D_1 \end{matrix} \middle| e^- \text{ från } S \right\rangle = \langle x, D_1 | S\rangle$$
$$= a\phi_1 + b\phi_2$$

På samma sätt:

$$\langle x, D_2 | S\rangle = b\phi_1 + a\phi_2$$

Sannolikhet för händelsen att e^- hamnar i x, och en foton detekteras i D_1:

$$P(e^- \text{ i } x; \text{ foton i } D_1) = |\langle x, D_1 | S\rangle|^2$$

$$= |a\phi_1 + b\phi_2|^2$$

ljus med kort våglängd: $b \approx 0 \rightarrow P = |a|^2 |\phi_1|^2$

" " lång " " : $b \approx a \rightarrow P = |a|^2 |\phi_1 + \phi_2|^2$,

så med en lampa som ger ljus med lång våglängd har vi interferens!.

Nu tittar vi på alla händelser (bryr oss inte om var fotonen hamnar):

Vi har två 'sluttillstånd' som vi kan skilja (foton i två olika detektorer):

$\langle e^-$ i x, foton i $D_1|$ och $\langle e^-$ i x, foton i $D_2|$

$P(e^-$ i x, foton i D_1 eller $D_2) =$

$$= |\langle x, D_1 | s\rangle|^2 + |\langle x, D_2 | s\rangle|^2$$

$$= |a\phi_1 + b\phi_2|^2 + |b\phi_1 + a\phi_2|^2$$

För $b \approx 0$ får vi: $P = |a|^2|\phi_1|^2 + |a|^2|\phi_2|^2$

ingen interferens

Fa b~a får vi: $P = 2|a|^2 |\phi_1 + \phi_2|^2$,
nu har vi interferens!.