F-11.

Snärjade (ell. sammanflätade) tillstånd och Bells olikheter.
(Backgrund för demonstrationen).

Vi betraktar en spin-$\frac{1}{2}$ partikel, och använder S_z basen: $S_z = \pm \hbar/2$: $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$
eller $|+\rangle$, $|-\rangle$

Om vi mäter S_z för en partikel i tillstånd:
$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$:
$P(S_z = +\hbar/2) = 1$; $P(S_z = -\hbar/2) = 0$

Om $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$:

$$P(S_z = +\hbar/2) = |\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = |1/\sqrt{2}|^2 = 1/2$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = |\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = |-1/\sqrt{2}|^2 = 1/2.$$

Säg att vi får värdet $S_z = -\hbar/2$, då blir vågfunktionen efter mätningen:
$|\psi\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$.

Om vi gör en mätning av S_z igen på samma partikel då får vi: $P(S_z = +\hbar/2) = 0$, $P(S_z = -\hbar/2) = 1$.

En annan fråga som vi kan ställa oss:
Vad är förväntansvärdet av en mätning av S_z för ett tillstånd $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$?
Då gör vi många mätningar, men varje gång på ett nytt tillstånd $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$
Förväntansvärdet av S_z, $\langle S_z \rangle$ är:

$$\langle S_z \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{värdet}}}{+\frac{\hbar}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sannolikhet}}}{P(S_z = +\hbar/2)} + -\frac{\hbar}{2} P(S_z = -\hbar/2)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

för $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$

Vi kan skriva det mer matematiskt:
S_z beskrivs av en operator (jmf. SGA):

$$S_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| - \langle\downarrow|) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

Förväntansvärdet blir:

$$\langle S_z \rangle = \langle \psi | S_z | \psi \rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{4} (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar/4 - \hbar/4 = 0.$$

Så, i hälften av mätningar får vi $+\hbar/2$, och $-\hbar/2$ i andra hälften.

För en mätning av x-komponenten av spin: $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Så nu får vi:

$$\langle S_x \rangle = \langle \psi | S_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{4} (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \hbar/4 \, (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\hbar/4 - \hbar/4 = -\hbar/2.$$

Det innebär att varje gång vi mäter spin i x riktning, vi får $-\hbar/2$. !

Matrisen för en mätning i y-riktning:

$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, och

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{4} (1, -1) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4} (1, -1) \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{4} i - \frac{\hbar}{4} i = 0.$$

Igen, i hälften av alla mätningar får vi $+\hbar/2$, och $-\hbar/2$ i andra hälften.

Tillstånd med två $s=\frac{1}{2}$ partiklar (A och B).

Ex: $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B \quad (*)$$

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$$

Alla tre är en produkt av A och B delen:

$$(*) \quad |\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B)\right)$$

Tillstånd som man inte kan skriva som en produkt är 'snärjade tillstånd'.

Ex: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$.

Sådana tillstånd leder till EPR paradox:
(Einstein, Podolski, Rosen)

Säg att vi har två partiklar (elektroner) som är i tillstånd $|\psi\rangle$.

Nu separerar vi dem, A till Malmö, B till Kiruna.

Alice gör en mätning på A i Malmö, och

Alice gör en mätning på A i Malmö, och får $s_z = +\hbar/2$. Efter mätningen blir tillståndet: $|\psi\rangle \rightsquigarrow |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$

Om Bob nu mäter S_z på B i Kiruna, får han $s_z = -\hbar/2$, med $P = 1$.

Så, mätningen i Malmö påverkar spinnet i Kiruna instantant!

Så kvantmekanik är också icke-lokalt!

Nu antar vi att kvantmekanik är fel, och att naturen är deterministisk. Det är något, som bestämmer vad S_z kommer bli för varje mätning, även om kvantmek. säger att $P(s_z = +\hbar/2) = P(s_z = -\hbar/2) = 1/2$ (till ex).

Nu tar vi ett system med två spinn-$\frac{1}{2}$, och gör många mätningar, på ett $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$$

Alice måter spin i 2 olika riktningar a, a' (väljer slumpmässig).

Bob måter spin i 2 olika riktningar b, b' (också slump slumpmässig).

Vi ta bort faktorer $\hbar/2$, så $a, a'; b, b'$ kan ta värden ± 1 (slipper skriva $\hbar/2$ på många ställen)

Om världen är klassisk, är värden för a, a', b, b' bestämd samtidigt.

Vi har $a = \pm 1$; $a' = \pm 1$.

Då har vi: $a + a' = 0$, och $a - a' = \pm 2$

eller $a + a' = \pm 2$, och $a - a' = 0$

Det innebär att $C = (a+a')b + (a-a')b' = \pm 2$

Så, om vi måter förväntansvärdet av C, då får vi: $|\langle C \rangle| \leq \langle |C| \rangle = 2$

Så, klassiskt har vi:

$$(*) \quad |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle| \leq 2$$

Men, i kvantmekanik kan vi få att $|\langle C \rangle| > 2$, maxvärdet är $|\langle C \rangle| \leq 2\sqrt{2}$.

(*) heter CHSH olikhet (eller, Bells olikhet).

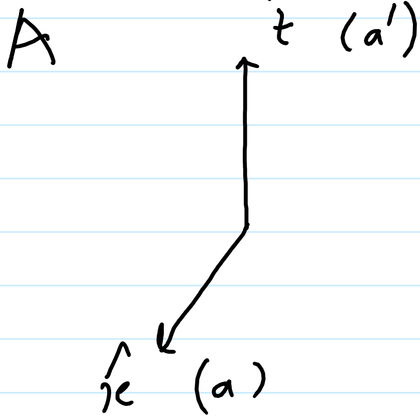
↳ Clauser - Horne - Shimony - Holt.

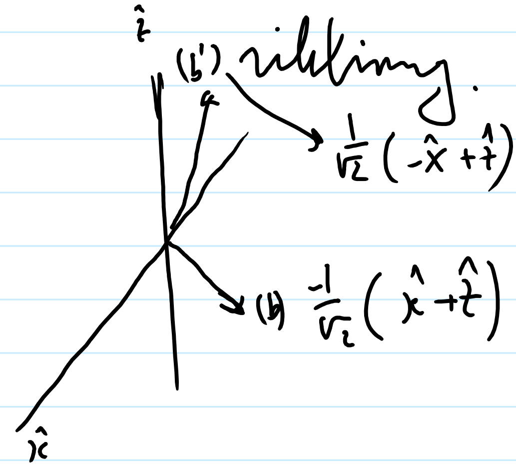
↳ Clauser-Horne-Shimony-Holt.

Hur kan vi i kvantmekanik få $|\langle C \rangle| > 2$?

Alice mäter slumpmässig i $\hat{x}$, eller $\hat{z}$ riktning

Bob mäter slumpmässig i $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x}+\hat{z})$ eller $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{z})$





Så: (a') σ^z: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A'$ b': $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B'$

a σ^x: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ b: $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^x + \sigma^z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$

Nu måste vi räkna ut:

$\langle ab \rangle$; $\langle a'b \rangle$; $\langle ab' \rangle$ och $\langle a'b' \rangle$

för tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right)$

Man får: $\langle ab \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle a'b \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle ab' \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle a'b' \rangle = -1/\sqrt{2}$

$$\langle a'b' \rangle = -1/\sqrt{2}$$

Så vi ser att: $\langle C \rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2$!

I en klassisk värld skulle man få $\langle C \rangle \leq 2$, men i kvantmekanik (och experiment!) får man $\langle C \rangle > 2$.

Så kvantmekanik är verklighet.

Det finns kryphål (detektorer är inte perfekt till ex), men de har alla stängts, även samtidigt!

Hur får man $\langle a'b \rangle$? Fyra bidrag

$$\langle \psi | a'b | \psi \rangle = \frac{1}{2} \, {}_A\langle \uparrow | {}_B\langle \downarrow | a'b | \uparrow \rangle_A | \downarrow \rangle_B$$

$$- \frac{1}{2} \, {}_A\langle \uparrow | {}_B\langle \downarrow | a'b | \downarrow \rangle_A | \uparrow \rangle_B$$

$$- \frac{1}{2} \, {}_A\langle \downarrow | {}_B\langle \uparrow | a'b | \uparrow \rangle_A | \downarrow \rangle_B$$

$$+ \frac{1}{2} \, {}_A\langle \downarrow | {}_B\langle \uparrow | a'b | \downarrow \rangle_A | \uparrow \rangle_B$$

två termer — två termer

Första termen är:

$$\frac{1}{2} \, {}_A\langle \uparrow | a' | \uparrow \rangle_A \, {}_B\langle \downarrow | b | \downarrow \rangle_B$$

Så vi behöver:

$$\langle \uparrow | a' | \uparrow \rangle_A = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$${}_A\langle\uparrow|a'|\uparrow\rangle_A = (1,0)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$${}_A\langle\uparrow|a'|\downarrow\rangle_A = (1,0)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$${}_A\langle\downarrow|a'|\uparrow\rangle_A = (0,1)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$${}_A\langle\downarrow|a'|\downarrow\rangle_A = (0,1)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -1$$

$${}_B\langle\uparrow|b|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt2}(1,0)\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt2}$$

$${}_B\langle\uparrow|b|\downarrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt2}(1,0)\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt2}$$

$${}_B\langle\downarrow|b|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt2}(0,1)\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1/\sqrt2$$

$${}_B\langle\downarrow|b|\downarrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt2}(0,1)\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1/\sqrt2$$

Så: $\langle a'b\rangle = \frac12\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt2} - \frac12\cdot0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right) - \frac12\cdot0\cdot(-1/\sqrt2)$

$$+\frac12\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt2}+0+0+\frac{1}{2\sqrt2} = 1/\sqrt2$$

$\langle ab\rangle$, $\langle ab'\rangle$ och $\langle a'b'\rangle$ funkar likadant!