F08

Egenskaper av bastillstånd:

$|i\rangle$ komplett bas; ex för $S=1$ partiklar

$|+\rangle$; $|0\rangle$; $|-\rangle$.

Varje tillstånd kan skrivas i termer av de här bastillstånd:

$$|\chi\rangle = a_+ |+\rangle_z + a_0 |0\rangle_z + a_- |-\rangle_z ,$$

med a_+, a_0, a_- komplexa tal.

Mätning av S_z: $P(S_z = +\hbar) = |a_+|^2$

$P(S_z = 0\hbar) = |a_0|^2$

$P(S_z = -\hbar) = |a_-|^2$

Mätning: vi har en partikel i tillstånd $|\chi\rangle$:

$$|\chi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle ,\quad \text{med } |i\rangle \ S_z \text{ bas}$$

$$|\chi\rangle = \frac{i}{2} |+\rangle_z - \frac{\sqrt{3}}{2} |-\rangle_z + 0 |0\rangle_z$$

Vad är $P(S_z = +\hbar)$?

$$P(S_z = +\hbar) = |\langle + | \chi\rangle|^2 = \left|\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(S_z = 0\hbar) = |\langle 0 | \chi\rangle|^2 = |0|^2 = 0$$

$$P(S_t = 0\hbar) = |\langle 0|\chi\rangle|^2 = |0|^2 = 0$$
$$P(S_z = -\hbar) = |\langle -|\chi\rangle|^2 = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = 3/4$$

$*$ $\langle j|i\rangle = \delta_{i,j}$

$*$ $\mathbb{1} = \sum_{\text{alla } i} |i\rangle\langle i|$ enhets operatorn:

$$|\chi\rangle = \mathbb{1}\,|\chi\rangle = \sum_i |i\rangle \underbrace{\langle i|\chi\rangle}_{=a_i} = \sum_i a_i |i\rangle$$

$*$ $\langle \chi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle^*$

$$\langle\chi|\,\mathbb{1} = \sum_i \langle\chi|i\rangle\langle i| = \sum_i \langle i|\chi\rangle^* \langle i|$$
$$= \sum_i a_i^* \langle i|$$

Anknytning till linjär algebra: (använder bas 'i')

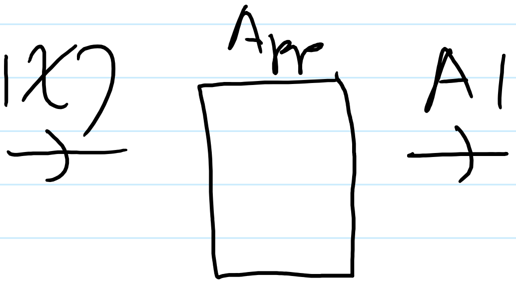
$$|\chi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \langle\chi| \leftrightarrow (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

Ta $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$; då:

$$\langle\varphi|\chi\rangle = \sum_i \underbrace{\langle\varphi|i\rangle}_{b_i^*} \underbrace{\langle i|\chi\rangle}_{a_i} = \sum_i b_i^* a_i$$

$$\leftrightarrow (b_1^*, b_2^*, b_3^*) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ett (SG) apparat: tar ett tillstånd, ger ett nytt!



$$|\chi\rangle \to \boxed{} \to A|\chi\rangle = |q\rangle$$

Hur beskriver vi A?

$$\langle q|A|\chi\rangle = \sum_{i,j} \underbrace{\langle q|i\rangle} \langle i|A|j\rangle \langle j|\chi\rangle$$

beskriver: $\langle q|$ $\quad A \quad$ $|\chi\rangle$

A beskrivs av $\langle i|A|j\rangle = A_{ij}$

Vi ser A_{ij} som element av en matris.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Hur skriver vi A 'en som'?

$$A = \mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_{i,j} |i\rangle \underbrace{\langle i|A|j\rangle}_{= A_{ij}} \langle j|$$

$$= A_{i,j}$$

$$= \sum_{i,j} A_{i,j} |i\rangle\langle j|$$

$$|\varphi\rangle = A|\chi\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{13} \\ \vdots & \ddots & \\ A_{31} & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Om vi har fler (SG) apparater i rad:

$$\xrightarrow{|\chi\rangle} \boxed{A} \xrightarrow{A|\chi\rangle} \boxed{B} \rightarrow B(A|\chi\rangle)$$

BA: ges av produkten av två matricer

OBS: ordning: $BA \neq AB$ i allmänhet!

Övning: $\langle\varphi|BA|\chi\rangle = \sum_{i,j,k} \langle\varphi|i\rangle\langle i|B|j\rangle\langle j|A|k\rangle\langle k|\chi\rangle$

Vilken bas ska man använda?

För varje möjliga mätvärde finns det ett bas tillstånd:

$S=\frac{1}{2}$ partikel: $s = +\hbar/2, -\hbar/2$: $|0\rangle, |1\rangle$

$S = 1/2$ partikel: $S_z = +\hbar/2, -\hbar/2$: $|\uparrow\rangle$; $|\downarrow\rangle$

Position i ett endimensionell system:
alla värden x är möjliga: så, $|x\rangle$ är
'∞ många' bastillstånd.

För en elektron: vi behöver spin, och läge,
(ell. spin och rörelsemängd).
Så vi vet, behöver man inget mer för att
beskriva en elektron!

Tidsutveckling: hur ändrar
tillstånd med tid?
Säg att vi vet tillståndet vid tid
$t = t_1$: $|\psi(t_1)\rangle$

Vad är tillståndet vid tid $t_2 = t_1 + \Delta t$?

Vi inför en 'apparat' "vänta", som
väntar från t_1 till t_2, och kallar den U:

$$|\psi(t_2 = t_1 + \Delta t)\rangle = U(t_2, t_1)\,|\psi(t_1)\rangle$$

Vi skriver $|\psi(t)\rangle$ i termer av en bas $|i\rangle$, så vi tittar på:

$$\langle i|\psi(t_2)\rangle = c_i(t_2)$$

stoppa in en 'etta'

$$= \langle i|\,U(t_2,t_1)\,\mathbb{1}\,|\psi(t_1)\rangle$$

$$= \sum_j \langle i|U(t_2,t_1)|j\rangle \underbrace{\langle j|\psi(t_1)\rangle}_{=c_j(t_1)}$$

Vi kallar $\langle i|U(t_2,t_1)|j\rangle$ för $U_{i,j}(t_2,t_1)$

Så vi kan skriva: $c_i(t_2) = \sum_j U_{ij}(t_2,t_1)\,c_j(t_1)$

eller: $c_i(t_1+\Delta t) = \sum_j U_{ij}(t_1+\Delta t, t_1)\,c_j(t_1)$

Om $\Delta t = 0$, då måste $U_{i,j} = \delta_{i,j}$, enhetsmatris.

Nu antar vi att avvikelsen från enhetsmatrisen är linjärt i Δt.
Så, vi tar $\Delta t = \delta t$ liten:

$$U_{i,j}(t+\delta t, t) = \delta_{i,j} + K_{i,j}(t)\,\delta t\,,$$

$$U_{i,j}(t+\delta t,t) = \delta_{i,j} + K_{i,j}(t)\,\delta t\ ,$$

men vi skriver detta som:

"$\sqrt{-1}$"

$$U_{i,j}(t+\delta t,t) = \delta_{i,j} - i/\hbar\ H_{i,j}(t)\,\delta t$$

OBS: index

$H_{i,j}(t)$ är element
av en matris som vi kallar
Hamiltonianen (eller hamiltonmatris,
operator).

Hamiltonianen beskriver tidsutvecklingen
av systemet, och den är kopplat till
systemets energi (se nere!).

Vi tar gränsen $\delta t \to 0$, och skriver en
differentialekvation för $c_i(t)$:

$$c_i(t+\delta t) = \sum_j U_{ij}(t,t+\delta t)\,c_j(t) = \sum_j\left(\delta_{ij} - i/\hbar\,H_{ij}(t)\right)c_j(t)$$

$$= c_i(t) - i/\hbar\ H_{ij}\,c_j(t)\,\delta t$$

Så: $-i/\hbar\sum_j H_{ij}\,c_j(t) = \left(c_i(t+\delta t) - c_i(t)\right)/\delta t$

I gränsen $\delta t \to 0$ får vi

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t)\, c_j(t) \text{, eller}$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t)\, c_j(t) .$$

I Dirac notation för tillstånd blir det: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$

* $H(t)$: bestämmer hur $|\psi(t)\rangle$ ändras i tid. Om man vet $|\psi(t_1)\rangle$, och $H(t)$, då vet man $|\psi(t)\rangle$ för alla tider!
* Med $|\psi(t)\rangle$ får vi sannolikheter för varje tid!
* $$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle}$$

är (tidsberoende) Schrödinger ekvationen

Exempel med bara ett tillstånd: $|1\rangle$. Då får vi: $|X\rangle = c_1(t) |1\rangle$

$|1\rangle$. Då får vi: $|X\rangle = c_1(t)|1\rangle$

$i\hbar \frac{d}{dt} c_1(t) = H_{11} c_1(t)$. $(*)$

Vi antar att H_{11} är <u>tidsoberoende</u>

Lösning till $(*)$ är $c_1(t) = \text{konstant} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} H_{11} t}$

Det här tillståndet har en bestämd energi $E = H_{11}$.

För att se detta, tittar vi på en våg:

En våg med bestämd $E = \hbar\omega$ och $p = \hbar k$ ges av

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{ikx} e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

Så, vi kan interpretera H_{11} som energi för tillståndet $|1\rangle$.