F07

Bas tillstånd

Amplituden skrivs som: $\langle \text{slut} | \text{start} \rangle$.

$|\chi\rangle$ är som en vektor, den innehåller all information om en partikel.

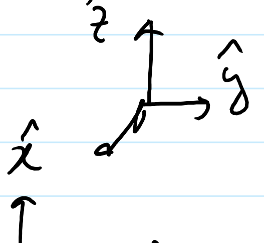
$\langle \chi|$ innehåller samma information.

För en spin-1 partikel: $|\chi\rangle$ uttrycks i en <u>bas</u>, till ex. $|+S\rangle$, $|0S\rangle$, $|-S\rangle$ är en bas, men vi kan använda vilken bas som helst ($|+T\rangle$, $|0T\rangle$, $|-T\rangle$ osv).

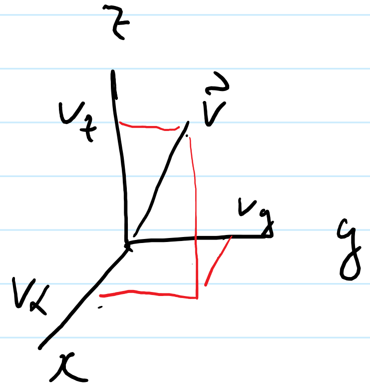
Så: $$|\chi\rangle = a|+S\rangle + b|0S\rangle + c|-S\rangle$$
$$= a'|+T\rangle + b'|0T\rangle + c'|-T\rangle,$$

med a, b, c, a', b', c' komplexa tal.

Vektorer:



enhets vektor.

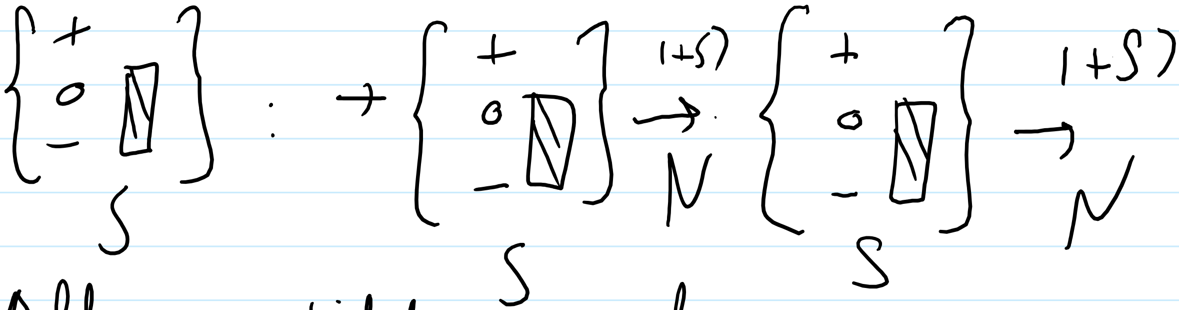


$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}.$$

enhets vektor.

Egenskaper av bastillstånd:

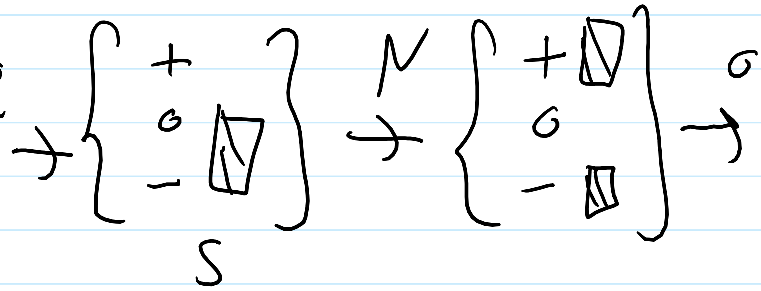
Om vi skickar partiklar i $|+S\rangle$ genom



Alla partiklar som kommer genom 1ª SGA kommer också genom 2ª SGA:

Så vi har: $\langle +S | +S \rangle = 1$.

Nu tittar vi på



Nu har vi: $\langle 0S | +S \rangle = 0$.

I allmänhet har vi följande relation för en komplett bas:

$$\boxed{\langle i | j \rangle = \delta_{i,j}} \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ om } i=j \\ 0 \text{ om } i \neq j \end{cases}$$

↑ Kronecker-δ

[här: $|i\rangle = |+S\rangle, |0S\rangle, |-S\rangle$]

Helt öppet SGA:

$$\underset{S}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \quad \underset{T}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \quad \underset{R}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} = \underset{S}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \quad \underset{R}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}$$

Amplitud (att en partikel i $|0S\rangle$ (i.e. efter 1[a] SGA) kommer genom den tredje:

$$\langle +R|+T\rangle\langle +T|0S\rangle + \langle +R|0T\rangle\langle 0T|0S\rangle + \langle +R|-T\rangle\langle -T|0S\rangle$$

$$= \langle +R|0S\rangle$$

Vänster led: $\displaystyle\sum_{\substack{\text{alla } i \\ (i=+,0,-)}} \langle +R|i\rangle\langle i|0S\rangle = \langle 0S|+R\rangle$

I allmänhet har vi:

$$\boxed{\langle \chi|\varphi\rangle = \sum_i \langle \chi|i\rangle\langle i|\varphi\rangle}$$

Så $\sum_i |i\rangle\langle i|$ fungerar som 'identitet'!

$$\sum_i \langle \chi|i\rangle\langle i|\varphi\rangle = \langle \chi|\Big(\sum_i |i\rangle\langle i|\Big)|\varphi\rangle$$

$$\shortparallel$$

$$\langle \chi | q \rangle$$

och detta gäller för alla $|\chi\rangle$ och $|q\rangle$, så det innebär att

$$\sum_{\text{alla } i} |i\rangle\langle i| = \mathbb{1} \quad : \text{"enhets operator"}$$

Vi får alltid sätta in en 'etta' någonstans:

[Som enhets matrisen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$]

$$|\chi\rangle = \sum_i |i\rangle \underbrace{\langle i | \chi \rangle}_{\text{komplext tal, säg } a_i}$$

$$= \sum_i |i\rangle \, a_i = \sum_i a_i |i\rangle$$

Nu har vi uttryckt $|\chi\rangle$ i en bas.

Allt man behöver för att specifiera $|\chi\rangle$ är

$$a_i = \langle i | \chi \rangle$$

Jämför: $|\chi\rangle = a|+S\rangle + b|0S\rangle + c|-S\rangle$

I allmänhet har vi: $\boxed{\langle \chi | q \rangle = \langle q | \chi \rangle^*}$

Komplexa vektorer:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = b_x^* a_x + b_y^* a_y + b_z^* a_z = (\vec{a} \cdot \vec{b})^*$$

Så: $\langle \chi | \underset{\uparrow \, \mathbb{1}}{=} \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | = \sum_i \langle i | \chi \rangle^* \langle i |$

$$= \sum_i a_i^* \langle i | = \sum_i \langle i | a_i^*$$

Vad är betydelsen av $\langle i | \chi \rangle$?

$\langle i | \chi \rangle$ är amplituden för systemet att 'gå' från in tillståndet $|\chi\rangle$ till sluttillståndet $\langle i|$.

$\langle i | \chi \rangle$ är amplituden för att få mätvärdet som 'motsvarar $|i\rangle$' om vi gör en mätning på $|\chi\rangle$.

Ex. spin-1 partikel, och vi skriver tillståndet i S_z basen: $|+\rangle$; $|0\rangle$; $|-\rangle$

Vi tar: $|\chi\rangle = \frac{1}{3}|+\rangle - 2\sqrt{2}/3\,|0\rangle + 0\,|-\rangle$

Vi gör en mätning av S_z:

$$P(S_z = +\hbar) = |\langle + | \chi\rangle|^2$$

$$= \Big| \tfrac{1}{3}\underbrace{\langle + | + \rangle}_{=1} - \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\underbrace{\langle + | 0\rangle}_{=0} + 0\underbrace{\langle + | - \rangle}_{=0}\Big|^2$$

$$= 1/9.$$

$$P(S_z = 0\hbar) = |\langle 0 | \chi\rangle|^2 = |-2\sqrt{2}/3|^2 = 8/9$$

$$P(S_z = -\hbar) = |\langle - | \chi\rangle|^2 = 0$$

Vi har visat hur man (be)skriver ett tillstånd i en viss bas.

Hur beskriver man Stern-Gerlach apparaten?

Vi måste veta vad den gör med ett godtyckligt tillstånd!

Vi har en SGA som vi kallar A_{pp}, och en partikel i ett godtyckligt tillstånd $|\chi\rangle$

partikel i ett godtyckligt tillstånd $|\chi\rangle$.
Vi antar att tillståndet för partikeln blir $|\varphi\rangle$ efter apparaten:

$$|\chi\rangle \longrightarrow \text{App} \longrightarrow |\varphi\rangle$$

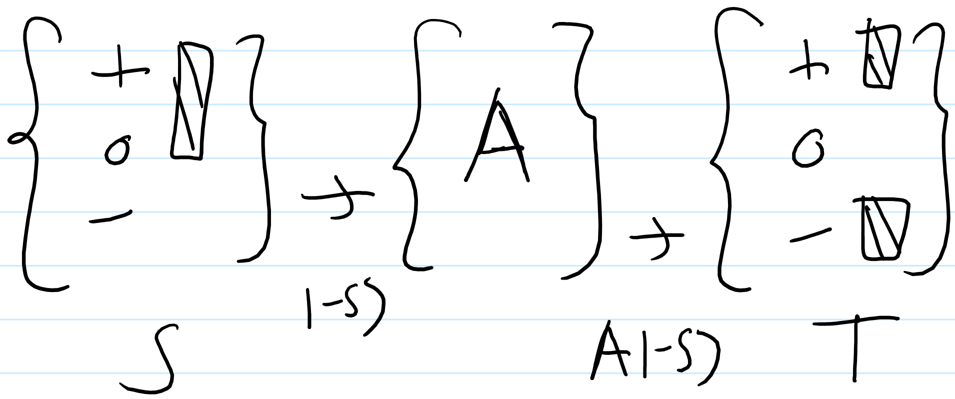
Man säger att App 'verkar på' $|\chi\rangle$, så vi ser App som en 'operator', och vi skriver:

$$\underbrace{A|\chi\rangle} = |\varphi\rangle$$

↳ operator A som verkar på $|\chi\rangle$.

Notationen är abstrakt, men väldigt smidigt!

För att beskriva A, använder vi SGA:er.



Innan A: bara partiklar i tillstånd

Innan A: bara partiklar i tillstånd $|-S\rangle$, p.g.a. 1:a SGA.

Efter A: $A|-S\rangle$.

Vad är amplituden för att komma genom 3e SGA?

$$\langle 0T|A|-S\rangle \quad \text{: detta är ett tal.}$$

I allmänhet behöver vi veta $\langle \varphi|A|\chi\rangle$ för godtyckliga $|\chi\rangle$ och $|\varphi\rangle$.

$\langle \varphi|A|\chi\rangle$ är amplituden för en partikel som går genom app. A, att hamna i tillstånd $|\varphi\rangle$ om den var i $|\chi\rangle$ innan apparaten.

För att kunna veta det behöver vi en beskrivning av apparaten (i en vald bas).

Vi använder tricket med $\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\langle i|$ igen:

$$\langle \varphi|\mathbb{1} A \mathbb{1}|\chi\rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\chi\rangle$$

(två summor, kommer nu!)

"

$\langle q|i\rangle = \langle i|q\rangle^*$: känd om vi vet $|q\rangle$ (två separata summor!)

$\langle j|\chi\rangle$ " " " " $|\chi\rangle$

$\langle i|A|j\rangle$: komplexa tal, som beskriver A fullständigt.

För spin-1 partiklar: $3 \times 3 = 9$ komplexa tal behövs.