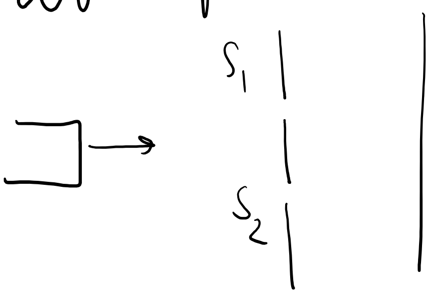
# F03

08 November 2016 08:00

Dubbelspalt experiment med elektroner:




* $e^-$ sänds och detekteras en åt gången, som en hel **partikel**

* får interferens, som för **vågor**.

Om vi **vet** (eller bara **kan veta**!) vilken spalt elektroner tar, då har vi **ingen** interferens

Om vi **inte vet** (ell. kan veta) vilken spalt elektronerna tar, då får vi interferens.

---

Allmän princip:

1) Sannolikhet av en händelse:

$$P = |\phi|^2$$, med $\phi$ sannolikhets **amplitud**

2) Om en händelse kan inträffa på två olika sätt, som vi **inte kan skilja åt** då måste sannolikhets**amplituderna** adderas:

$\phi = \phi_1 + \phi_2$ ...

$\phi = \phi_1 + \phi_2$ , och

$P = |\phi_1 + \phi_2|^2$ : interferens

3) Om vi kan skilja åt händelserna, då adderas sannolikheterna:

$P = P_1 + P_2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ : ingen interferens!

Man kan inte göra ett experiment där man vet vilken spalt elektronerna tar, och ha interferens samtidigt!

Form av Heisenbergs obestämbarhetsrelation

Allmän princip!

Mer känd form:

Obestämbarhetsrelation för position x och rörelsemängd i x-led $p_x = m v_x$:

$\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar/2 \qquad \hbar = h/2\pi$

$\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar/2 \qquad \hbar = h/2\pi$

$\Delta x$: osäkerhet i partikelns position i $x$ riktning

$\Delta p_x$ " " " rörelsemängd i $x$ "

$x$ och $p_x$ kan inte både vara bestämmda exact samtidigt!

Om $\Delta x$ är liten, då måste $\Delta p_x$ vara stor, och v.v.

Samma relation gäller i $y$, $z$ riktning:

$\Delta y \, \Delta p_y \geq \hbar/2$ ; $\Delta z \, \Delta p_z \geq \hbar/2$, men

$y$ och $p_z$ kan vara bestämmda exact:

$\Delta y \, \Delta p_z \geq 0$ osv.

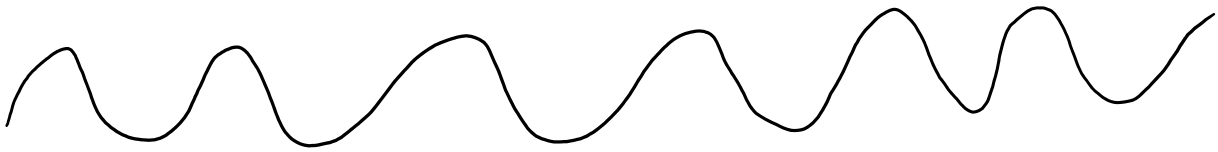
Det kommer från vågnaturen av partiklar, klassiska vågor har samma egenskap!

Relation mellan $p$ och $\lambda$: $p = \hbar k = h/\lambda$

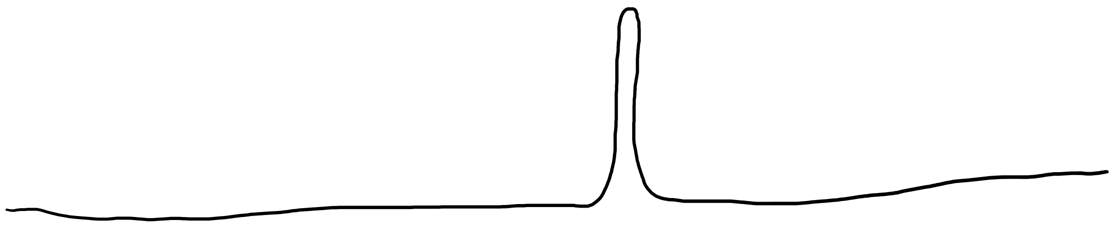
($k$ = vågtal $= 2\pi/\lambda$)

Vågor: $\lambda$ kan inte vara väl bestämmd för

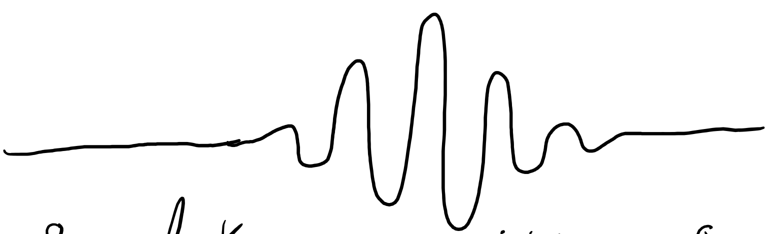
Vågor: λ kan inte vara väl bestämd för ett litet 'vågpaket':



våg; λ helt bestämd, position helt obestämd.



'partikel': λ obestämd, position bestämd
(addera många vågor, med olika λ).



vågpaket: λ, position något bestämd.

Osäkerhet i λ (ell. # oscillationer) ger osäkerhet i k, och därför p.

Om vi inte bryr oss om faktorer 2 osv:

Vanliga vågor: $\Delta x \, \Delta k \gtrsim 2\pi$

Kvant fysik: $\Delta k_x = \Delta p_x / \hbar$, så

$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$.

med faktorer rätt: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Det finns en gräns hur välbestämd

$x$ och $p_x$ kan vara.

Detta innebär också en experimentell gräns!

OBS: $\Delta x$ kan vara noll, men då är

* $p_x$ helt obestämd!

* I en konkret situation beror $\Delta x$ och $\Delta p_x$

på 'vågfunktionen' som beskriver partikeln.

* Betydelse av $\Delta x$:

Standard avvikelsen om vi gör många mätningar

av läget $x$ (på samma system).

Om $\psi(x,t)$ är partikelns vågfunktion, då

är $|\psi(x,t)|^2$ sannolikhet att hitta partikeln

vid läge $x$, på tid $t$.

[illegible] $= A e^{i(kx-\omega t)}$

Exempel: $\psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)}$

Partikeln har bestämda energi och rörelsemängd:

$E=\hbar\omega$; $p_x = \hbar k$.

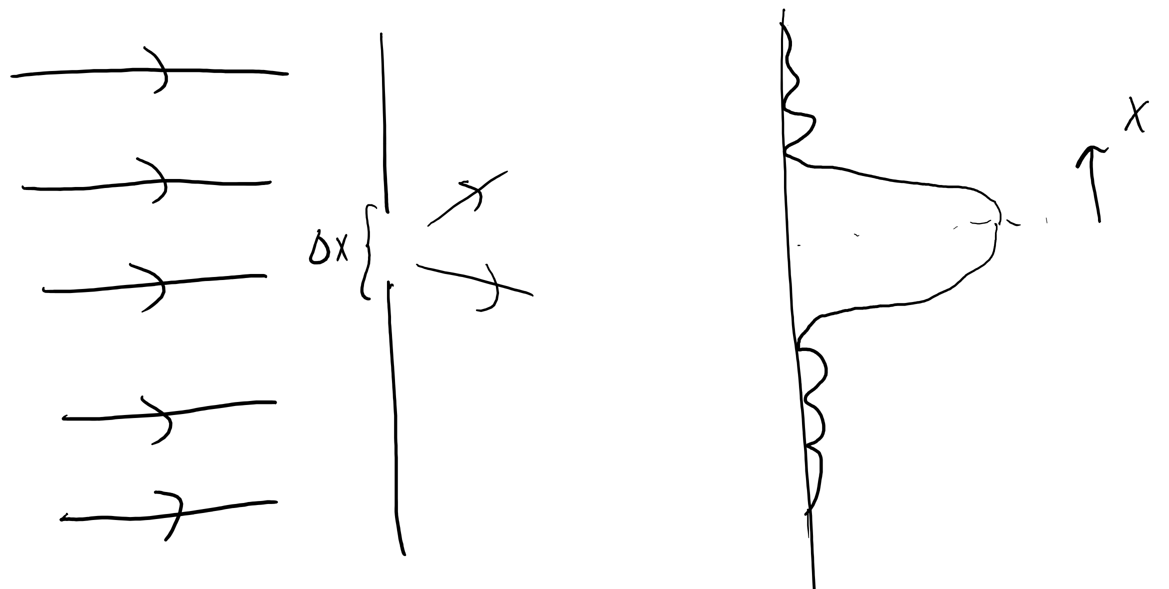
Problem med $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$?

Nej, om vi tittar var partikeln är:

$|\psi(x,t)|^2 = |A e^{i(kx-\omega t)}|^2 = A^2$, lika stor överallt! $\Delta x \to \infty$

Exempel: diffraktion med en enkel spalt:

Skickar en plan våg på spalten:




Före spalten: $p_x = 0$ bestämd (så $\Delta p_x = 0$)

Före spalten: $p_x = 0$ bestämd ($\Delta p_x = 0$)

men $x$ helt obestämd.

Efter spalten: $x$ ganska väl bestämd, men p.g.a. diffraktion är $p_x$ inte helt bestämd längre!

Annan exempel: stabilitet av atomer.

Klassiskt: atomer är ostabila!

Elektroner rör i cirkelbanor runt kärnan.

De borde skicka ut strålning, och förlora energi, och hamna på kärnan.

Kvant mekanik: $x$ och $p_x$ inte välbestämd, och $e^-$ måste vara i vissa 'banor'.

Elektroner runt en kärna: beskrivs med en vågfunktion $\psi(\vec{r}, t)$.

Hur utspridd är den? Vad är medelvärdet av avståndet till kärnan?

Kallar medelvärdet av avståndet till kärnan $a$, och vi minimera energi (approximativt).

a, och vi minimera energi (approximativt).

$\Delta x \sim a$, så med Heisenberg $\Delta p_x \sim \hbar/a$

Energi för elektronen: $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

$$E_{pot} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \sim \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Så: $E_{tot} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

När är $E_{tot}$ minimal? $\frac{dE_t}{da} = 0$

$$\frac{dE_{tot}}{da} = \frac{-2\hbar^2}{2ma^3} - (-1)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0$$

Så $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = \frac{2\hbar^2}{2ma_0^3} \Rightarrow a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} \sim 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

Storlek i verklighet $\sim 1$ Å, så det stämmer ganska bra!

Vad blir $E_{tot}$ för $a = a_0$? $E_t = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = -13.6\,\mathrm{eV}$

Precis energin för en väte atom!

Precis energin för en väte atom:

$E_t$ negativ: det kostar energi att 'få loss' elektronen från kärnan!

Det kallas ett <u>bundet tillstånd</u>

Atomer är stabila p.g.a. obestämbarhets relationen (och Pauliprincipen: två elektroner kan inte vara i samma tillstånd).