Snärjade (sammanflätade) tillstånd och Bells olikhet

Spin $\frac{1}{2}$ partikel (z-bas): $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$: $|\uparrow\rangle$; $|\downarrow\rangle$
eller $|+\rangle$; $|-\rangle$

Om vi mäter s_z för $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$:

$$P\left(s_z = +\frac{\hbar}{2}\right) = 1 \qquad P\left(s_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = 0$$

Om $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$:

$$P\left(s_z = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(s_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \qquad = \frac{1}{2}$$

Om vi får värdet $s_z = -\frac{\hbar}{2}$, då blir tillståndet efter mätningen:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$$

Nu gör vi en mätningen på samma system, och får $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ med slh $P = 1$!

Annan fråga: vad är förväntansvärde av en mätning av s_z för ~~ts~~ ett tillstånd $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$?

Vi gör mätningen många gånger, varje gång på ett nytt tillstånd $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$

Förväntans värde!

$$\langle S_z \rangle = +\frac{\hbar}{2} P\left(S_z = +\frac{\hbar}{2}\right) + \frac{\hbar}{2} P\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right)$$

↑ värde ↗ slh ↑ värde ↗ slh

$$= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Matematiskt: S_z beskrivs av en operator (jmf. SG apparat), med element: $S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| - \langle\downarrow|) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\langle S_z \rangle = \langle \psi | S_z | \psi \rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} (1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4} (1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1 - 1) = 0$$

En mätning av S_x: $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, så nu får vi

$$\langle S_x \rangle = \langle \psi | S_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{4} (1, -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4} (1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(-1 - 1) = -\frac{\hbar}{2}$$

$|\psi\rangle$ har spinnet i $-x$ riktning.

Tillstånd med två $s=\frac{1}{2}$ partiklar (a A och B):

Ex: $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$ *

$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$

Alla tre är en <u>produkt</u> av A och B delen

* $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B)\right)$

Tillstånd som <u>inte</u> är en produkt: snärjade tillstånd

Ex $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$

EPR paradox (Einstein-Podolsky-Rosen):

Ett system producerar två e^- med tillstånd $|\psi\rangle$; båda

~~A~~ e^- separeras, A till Malmö; B till Kiruna

Någon, say Alice mäter s_z av e^- i A (Malmö), och

råkar får $s_z = +\frac{\hbar}{2}$. Efter mätningen beskrivs systemet

av $|\psi\rangle \rightsquigarrow |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$.

Nu mäter Bob spinnet av e^- i B, och får $s_z = -\frac{\hbar}{2}$, med

$P=1$!

Mätningen i Malmö påverkar spinnet av e^- i Kiruna

instantant!

Kvant-fysik är icke-lokalt, icke deterministiskt!

Anta: KM är fel, världen __är__ deterministisk och lokalt;
det finns 'dolda variabler', som säger vilket värde vi kommer att få,
även om KM säger $P(\uparrow) = P(\downarrow) = \frac{1}{2}$. (Lokal realism).

Ta $|\psi\rangle = \cancel{|0\rangle}$ och vi gör många mätningar, varje gång på

en ny $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$.

Alice och Bob mäter, slumpmässig, i olika riktningar: a eller a'
b eller b'.

[Vi bortser från faktorn $\frac{\hbar}{2}$ nu]

De kan få värden $a, a', b, b' = \pm 1$

Vi antar: alla värden är bestämda samtidigt

$a, a' : \pm 1$, få antingen $a + a' = 0$, och $a - a' = \pm 2$
eller $a + a' = \pm 2$ och $a - a' = 0$

Så, kombinationen $C = (a + a')b + (a - a')b' = \pm 2$

Väntevärde av många mätningar: $|\langle C \rangle| \leq \langle |C| \rangle = 2$

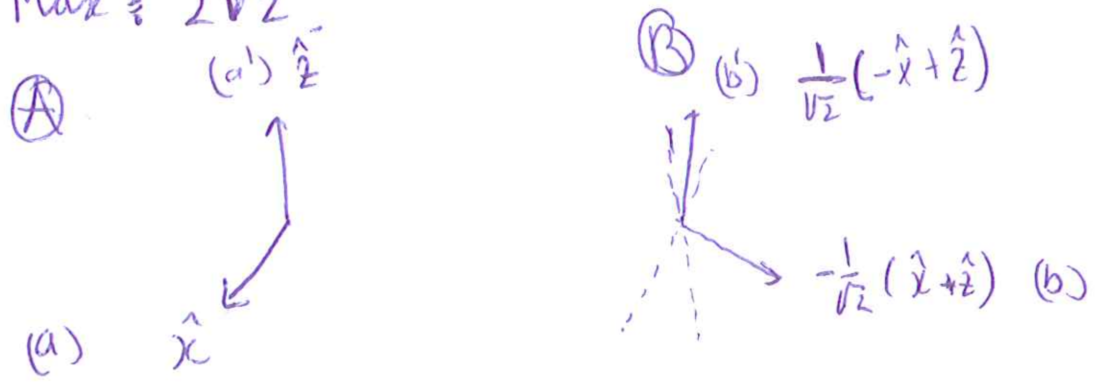
Så: $|\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle|^2 \leq 2$

CHSH olikhet (ell. Bells olikhet)

↳ Clauser-Horne-Shimony-Holt

I kvant-fysik kan vi får högre värden än 2 !,

Max = $2\sqrt{2}$



(a') $\sigma_z : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A'$ (b') $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B'$

(a) $\sigma_x : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$

Vi har tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$, och räknar ut $\langle ab\rangle$; $\langle a'b\rangle$; $\langle ab'\rangle$, $\langle a'b'\rangle$.

Ex: $\langle a'b\rangle$: fyra olika bidrag

$$\langle\psi|a'b|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,{}_A\langle\uparrow|\,{}_B\langle\downarrow|\,a'b\,|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - \frac{1}{2}\,{}_A\langle\uparrow|\,{}_B\langle\downarrow|\,a'b\,|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$$

två termer två termer

$$\| \quad \frac{1}{2}\,{}_A\langle\uparrow|a'|\uparrow\rangle_A\,{}_B\langle\downarrow|b|\downarrow\rangle_B$$

$$-\frac{1}{2}\,{}_A\langle\downarrow|\,{}_B\langle\uparrow|\,a'b\,|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,{}_A\langle\downarrow|\,{}_B\langle\uparrow|\,a'b\,|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$$

Vi behöver:

$${}_A\langle\uparrow|a'|\uparrow\rangle_A = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$${}_A\langle\uparrow|a'|\downarrow\rangle_A = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$${}_A\langle\downarrow|a'|\uparrow\rangle_A = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$${}_A\langle\downarrow|a'|\downarrow\rangle_A = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$${}_B\langle\downarrow|b|\downarrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$${}_B\langle\uparrow|b|\uparrow\rangle_B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Så: $\langle a'b\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

På samma sätt:

$\langle ab \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle a'b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle a'b' \rangle = -1/\sqrt{2}$, så:

$\langle C \rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2$!

Så, olikheten som man skulle få från en klassisk teori är bruten. KM är ~~vad~~ verklighet.

Det finns olika 'kryphål', men de har alla täckts, och nyligen samtidigt!